

Vasco Moço Mano

Álgebras de Jordan, Espectros de Grafos e Grafos Fortemente Regulares



Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2013

Vasco Moço Mano

Álgebras de Jordan, Espetros de Grafos e Grafos Fortemente Regulares



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da
Universidade do Porto para obtenção do grau de Doutor
em Matemática Aplicada*

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2013

Aos meus pais, Domingos e Luísa.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço aos meus orientadores, Professor Doutor Luís António de Almeida Vieira e Professora Doutora Enide Cascais Silva Andrade Martins, aos quais devo estes quatro anos de enriquecimento académico e pessoal da minha vida.

Quando em Dezembro de 2008 conheci o Doutor Luís Vieira, como professor da disciplina de “Álgebras de Jordan e Grafos”, nunca imaginei que o trabalho desenvolvido no âmbito daquela disciplina constituísse um preâmbulo para o trabalho que se apresenta agora nesta tese. O Doutor Luís Vieira para além de professor da disciplina foi um motivador, um dinamizador incansável de uma generosa disponibilidade em todos os momentos dos trabalhos de doutoramento.

De igual forma, agradeço à Doutora Enide Martins o apoio permanente aos trabalhos de investigação, a sua inextinguível generosidade, organização, apurada crítica científica e pormenorizado trabalho de revisão. Agradeço o inestimável apoio nos congressos internacionais em que participei e particularmente a sua orientação naqueles momentos de maior exigência científica no rumo dos trabalhos.

Registo um agradecimento especial ao Professor Doutor Domingos Moreira Cardoso, da Universidade de Aveiro, pelos trabalhos em colaboração realizados que produziram um artigo submetido para publicação que conduziu a algumas comunicações orais em conferências. Os momentos de trabalho partilhados constituíram para mim uma fonte de constante aprendizagem.

Agradeço a todos os professores, quer da Faculdade de Ciências, quer da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, quer ainda da Universidade de Aveiro, que de alguma forma contribuiriam para este trabalho que se apresenta. A mais singela palavra de

apreço ou de incentivo constituiu uma força catalisadora para os trabalhos de investigação e de escrita subjacentes à tese.

Por fim, agradeço à minha família e aos meus amigos por serem uma constante na minha vida. Uma constante chamada inspiração e dedicação. Na minha opinião, mais importante que o valor formal de uma qualquer obra é o valor que se extrai do conteúdo da mesma no sentido de servir os outros. Assim, esta tese é dedicada à sociedade em que vivo, em geral, e em particular a todos os que me rodeiam.

Como em tudo na minha vida, agradeço aos meus pais que me apoiam e me compreendem incondicionalmente desde o primeiro minuto.

Resumo

Nesta tese obtemos novas condições de admissibilidade sobre o conjunto de parâmetros e o espectro de um grafo fortemente regular. Como ponto de partida para o trabalho desenvolvido associámos uma álgebra de Jordan euclidiana à matriz de adjacência de um grafo fortemente regular.

Assim, começamos por sintetizar os principais resultados sobre álgebras associativas em potência, bem como sobre álgebras de Jordan e álgebras de Jordan euclidianas. O Teorema do Entrelaçamento de valores próprios de Cauchy, de importância central na demonstração dos principais resultados da tese, é generalizado a elementos de álgebras de Jordan euclidianas simples.

Apresentamos as definições em Teoria dos Grafos relevantes para o trabalho desta tese e descrevemos pormenorizadamente a família dos grafos fortemente regulares. No sentido em que um grafo fortemente regular, conjuntamente com o seu complementar, pode ser interpretado como um esquema associativo simétrico com duas classes, apresentamos estas estruturas combinatórias e demonstramos novos resultados sobre os parâmetros de Krein associados a um esquema associativo com um número qualquer de classes.

Finalmente, dado um grafo fortemente regular G com matriz de adjacência A , consideramos o espaço das matrizes reais simétricas gerado pela matriz identidade e pelas potências naturais de A . Este espaço, munido do produto de Jordan e do produto interno dado pelo traço usual do produto usual de matrizes, é uma álgebra de Jordan euclidiana com característica 3. A partir do único sistema de idempotentes ortogonais, Υ , desta álgebra de Jordan euclidiana associada a A , generalizamos os parâmetros de Krein de G . A generalização obtida, para além de produzir novas condições generalizadas de

admissibilidade sobre o conjunto de parâmetros e sobre o espectro de G , permitiu-nos obter um novo majorante para alguns dos parâmetros de Krein do grafo G . Este novo majorante revela-se sempre mais apertado do que aquele que era conhecido e em alguns casos é mesmo óptimo, não podendo ser melhorado.

Novas condições de admissibilidade são também obtidas através da construção de uma série binomial generalizada de potências de Kronecker dos elementos de Υ , bem como adaptando as séries das funções hiperbólicas do seno e do cosseno. Estas novas desigualdades de admissibilidade contribuíram para iluminar algumas propriedades espectrais dos grafos fortemente regulares.

Palavras-chave:

- 05Exx, Algebraic combinatorics;
- 05C50, Graphs and linear algebra;
- 05E30, Associative schemes, strongly regular graphs.

Abstract

In this thesis we obtain new admissibility conditions over the parameter set and the spectrum of a strongly regular graph. As a starting point to our work we associate an Euclidean Jordan algebra to the adjacency matrix of a strongly regular graph.

Therefore, we start by summarize the principal results on power associative algebras, Jordan algebras and Euclidian Jordan algebras. Cauchy's Eigenvalues Interlacing Theorem, which is of central importance for the proof of our main results, is generalized to elements of simple Euclidean Jordan algebras.

We present some definitions in Graph Theory necessary to the development of this work and we describe in detail the family of strongly regular graphs. In the sense that a strongly regular graph together with its complement is a symmetric association scheme with two classes, we present these combinatorial structures and we prove some new results over the Krein parameters associated to an association scheme with any number of classes.

Finally, given a strongly regular graph G with adjacency matrix A , we consider the space of real symmetric matrices spanned by the identity matrix and by the natural powers of A . This space, endowed with the Jordan product and the inner product given by the usual trace of the standard matrix product, is an Euclidean Jordan algebra with rank 3. From the unique complete system of orthogonal idempotents, Υ , associated to A , we generalize the Krein parameters of G . This generalization, besides producing new generalized admissibility conditions over the parameters and the spectrum of G , allowed us to obtain a new upper bound for some of the Krein parameters of G . This new upper bound is always tighter than the one known so far and in some cases is indeed optimal and cannot be improved.

New admissibility conditions are also obtained by constructing a generalized binomial series

of Kronecker powers of the elements of Υ , as well as considering the hyperbolic functions series of the sine and the cosine. These new admissibility inequalities contributed to illuminate some spectral properties of strongly regular graphs.

Key-words:

- 05Exx, Algebraic combinatorics;
- 05C50, Graphs and linear algebra;
- 05E30, Associative schemes, strongly regular graphs.

Conteúdo

Resumo	7
Abstract	9
Lista de Notação Utilizada	13
Lista de Figuras	17
Lista de Tabelas	19
1 Introdução	21
2 Álgebras de Jordan Euclidianas	27
2.1 Álgebras Associativas em Potência	28
2.2 Álgebras de Jordan	33
2.3 Álgebras de Jordan Euclidianas	39
2.4 Generalização do Teorema do Entrelaçamento a Álgebras de Jordan Euclidianas Simples	61
3 Grafos Fortemente Regulares	71
3.1 Generalidades sobre Grafos	73

3.2	Grafos Fortemente Regulares	78
3.2.1	Definição e Propriedades	79
3.2.2	Famílias Particulares de Grafos Fortemente Regulares	85
3.2.3	Esquemas Associativos e Grafos Fortemente Regulares	91
3.2.4	Condições de Admissibilidade	108
4	Álgebras de Jordan Euclidianas e Grafos Fortemente Regulares	111
4.1	Uma Álgebra de Jordan Euclidiana Associada à Matriz de Adjacência de um Grafo Fortemente Regular	112
4.2	Uma Generalização dos Parâmetros de Krein	114
4.3	Condições de Admissibilidade Generalizadas de Krein	116
4.4	Novo Majorante para os Parâmetros de Krein	119
4.5	Séries Binomiais Generalizadas e Condições de Admissibilidade	121
4.6	Séries Funcionais e Condições de Admissibilidade	129
4.7	Conclusões e Trabalho Futuro	138
	Bibliografia	141
	Índice	147

Lista de Notação Utilizada

\mathcal{A}	Álgebra de Bose-Mesner de um esquema associativo 96
$A^{\circ p}$	Potência de Hadamard de ordem p de A 114
$A^{\otimes p}$	Potência de Kronecker de ordem p de A 114
A_i	Matrizes de adjacência dos grafos G_i 92
C_k	Ciclo de ordem k 78
$\text{car}(\cdot)$	Característica de um elemento da álgebra ou da álgebra 29
$\text{comp}(C)$	Comprimento de um caminho C 77
$D_u f(x)$	Derivada da função f na direção de u 35
$d_G(v)$	Grau de um vértice v de um grafo G 77
$\det(u)$	Determinante do elemento u 31
$\text{diam}(G)$	Diâmetro do grafo G 78
$\text{dist}(u, v)$	Distância entre os vértices u e v 77
E_i	Elemento de um sistema completo de idempotentes ortogonais 96
$E_{\alpha}^{\circ x}$	$E_{\alpha}^{\circ x} = (E_{\alpha})^{\circ x}$ 115
$E_{\alpha}^{\otimes x}$	$E_{\alpha}^{\otimes x} = (E_{\alpha})^{\otimes x}$ 115
$E_{\alpha\beta}^{\circ yz}$	$E_{\alpha\beta}^{\circ yz} = (E_{\alpha})^{\circ y} \circ (E_{\beta})^{\circ z}$ 115
$E_{\alpha\beta}^{\otimes yz}$	$E_{\alpha\beta}^{\otimes yz} = (E_{\alpha})^{\otimes y} \otimes (E_{\beta})^{\otimes z}$ 115
$E_{\alpha \oplus \beta}^{\circ x}$	$E_{\alpha \oplus \beta}^{\circ x} = (E_{\alpha} + E_{\beta})^{\circ x}$ 115
$E_{\alpha \oplus \beta}^{\otimes x}$	$E_{\alpha \oplus \beta}^{\otimes x} = (E_{\alpha} + E_{\beta})^{\otimes x}$ 115
$E_{\gamma(\alpha \oplus \beta)}^{\circ yz}$	$E_{\gamma(\alpha \oplus \beta)}^{\circ yz} = (E_{\gamma})^{\circ y} \otimes (E_{\alpha} + E_{\beta})^{\circ z}$ 115
$E_{\gamma(\alpha \oplus \beta)}^{\otimes yz}$	$E_{\gamma(\alpha \oplus \beta)}^{\otimes yz} = (E_{\gamma})^{\otimes y} \otimes (E_{\alpha} + E_{\beta})^{\otimes z}$ 115
e	Elemento unidade da álgebra V 28
$\text{End}(E)$	Conjunto dos endomorfismos de E 52

\overline{G}	Grafo complementar de G 81
G_i	Grafos correspondentes às relações R_i de um esquema associativo ... 91
$g(G)$	Cintura do grafo G 78
$GF(p^n)$	Corpo finito com p^n elementos, sendo p um primo e n um natural 85
$H(n, k)$	Esquema de Hamming com parâmetros n e k 92
$Herm(n, \mathbb{F})$	Espaço das matrizes hermiticas de ordem n com entradas em \mathbb{F} 52
\mathcal{I}_k	Subconjunto ordenado de $\{1, 2, \dots, r\}$, com k elementos 63
I_n	Matriz identidade de ordem n 32
J_n	Matriz de ordem n de entradas unitárias 69
$\mathcal{J}(V)$	Conjunto dos idempotentes primitivos de V 45
$J(n, k)$	Esquema de Johnson com parâmetros n e k 92
K_n	Grafo completo de ordem n 75
$K_{m,n}$	Grafo bipartido completo com $V(K_{m,n}) = A \times B$, $ A = m, B = n$... 75
k_i	Regularidade do grafo G_i 91
\mathcal{L}^n	Álgebra de Spin de ordem n 34
L_i	Matrizes de interseção de um esquema associativo 92
$L(u)$	Endomorfismo em V tal que $v \mapsto u \bullet v$ 33
$\mathcal{L}(G)$	Grafo linha do grafo G 75
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes quadradas de ordem n e entradas reais 50
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas reais 50
m_i	$m_i = \text{car}(E_i)$ 99
m_θ, m_τ	Multiplicidades dos valores próprios θ e τ , respectivamente 75
$\max(\cdot)$	Máximo de um conjunto 29
O	Operador nulo 33
P	Matriz própria de um esquema associativo 99
$P(u)$	Representação quadrática de um elemento $u \in V$ 37
$p_i(j)$	Valores próprios de um esquema associativo 99
p_{ij}^l	Números de interseção de um esquema associativo 91
$p(u, \lambda)$	Polinómio característico de u em ordem à variável λ 30
$\hat{p}(u, \lambda)$	Polinómio mínimo de u em ordem à variável λ ??
Q	Matriz própria dual de um esquema associativo 99

$q_i(j)$	Valores próprios duais de um esquema associativo	99
$q_{i,j}^l$	Parâmetros de Krein de um esquema associativo	100
$q_{\alpha x}^i, q_{\alpha\beta yz}^i$	Parâmetros de Krein generalizados	115
$q_{(\alpha\oplus\beta)x}^i$	Parâmetros associados a $E_{\alpha\oplus\beta}^{\circ x}$	115
$q_{\gamma(\alpha\oplus\beta)yz}^i$	Parâmetros associados a $E_{\gamma(\alpha\oplus\beta)}^{\circ yz}$	115
R_i	Relações de um esquema associativo	91
Υ	Sistema completo de idempotentes ortogonais de \mathcal{V}'_n associado a A ..	112
$Sym(n, \mathbb{R})$	Espaço das matrizes reais simétricas	32
$\text{tr}(u)$	Traço do elemento u	31
u'	Parte principal de u relativamente a \mathcal{I}_k	68
V	Álgebra real de dimensão finita, abreviatura de (V, \bullet)	28
$V(c, \lambda)$	Subespaço de V associado ao valor próprio λ do operador $L(c)$	41
V_{ii}	Subespaço de V dado por $V(c_i, 1)$	50
V_{ij}	Subespaço de V dado por $V(c_i, \frac{1}{2}) \cap V(c_j, \frac{1}{2})$	50
$V(G)$	Conjunto dos vértices do grafo G	73
\mathcal{V}_n	Álgebra de Jordan euclidiana $Sym(n, \mathbb{R})$	30
\mathcal{V}'_n	Subálgebra de \mathcal{V}_n gerada por I_n e pelas potências naturais de A	112
λ_i^\downarrow	Ordenação dos valores próprios λ_i por ordem decrescente	64
$\lambda_{\max}(\cdot)$	Maior valor próprio de uma matriz	69
$\lambda_{\min}(\cdot)$	Menor valor próprio de uma matriz	69
δ_{ij}	Símbolo de Kronecker	51
θ, τ	Valores próprios de A , para além de k	112
Ω	Cone dos quadrados de V	40
$\overset{\circ}{\Omega}$	Interior do cone dos quadrados de V	40
\oplus	Operador da soma direta	41
\otimes	Operador do produto de Kronecker entre matrizes	69
\circ	Operador do produto de Hadamard entre matrizes	69
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana usual	34
$[,]$	Parênteses de Lie	33

Lista de Figuras

Figura 2.3.1	Regra da multiplicação de quaterniões	54
Figura 2.3.2	Regra da multiplicação de octoniões	58
Figura 3.0.1	Diagrama de Kekulé	72
Figura 3.1.1	Exemplo de um grafo	73
Figura 3.1.2	Exemplo de um grafo e o seu complementar	74
Figura 3.1.3	Grafo completo de ordem 5	75
Figura 3.1.4	Grafo completo bipartido $K_{3,3}$	75
Figura 3.1.5	Exemplo de um grafo e o seu grafo linha	75
Figura 3.1.6	Exemplo de um grafo	76
Figura 3.1.7	Exemplo de um grafo desconexo	77
Figura 3.1.8	Exemplo de um grafo dirigido	78
Figura 3.2.1	Três exemplos de grafos fortemente regulares	79
Figura 3.2.2	Dois grafos não isomorfos com parâmetros $(16, 6, 2, 2)$	80
Figura 3.2.3	Os três primeiros grafos de Paley	85
Figura 3.2.4	Os três primeiros grafos cocktail party	89
Figura 3.2.5	Os dois primeiros grafos de Moore	90

Lista de Tabelas

Tabela 2.3.1	Tabela de multiplicação dos elementos da base de \mathbb{H}	54
Tabela 2.3.2	Tabela de multiplicação dos elementos da base de \mathbb{O}	58
Tabela 3.2.1	Tabela de multiplicação das matrizes do Exemplo 3.2.5	95
Tabela 3.2.2	Tabela de multiplicação das matrizes do Exemplo 3.2.7	97
Tabela 3.2.3	Dualidade entre os parâmetros de Krein e os números de interseção ..	95
Tabela 4.3.1	Resultados numéricos para q_{2x}^0	117
Tabela 4.3.2	Resultados numéricos para q_{2x}^2	118
Tabela 4.3.3	Resultados numéricos para q_{1x}^0 e q_{1x}^1	119
Tabela 4.5.1	Resultados numéricos para $q_{\infty\alpha}^2$	125
Tabela 4.5.2	Resultados numéricos para a desigualdade (4.21)	128
Tabela 4.5.3	Resultados numéricos para a desigualdade (4.23)	129
Tabela 4.6.1	Resultados numéricos para a desigualdade (4.30)	137
Tabela 4.6.2	Resultados numéricos para a desigualdade (4.36)	137

Capítulo 1

Introdução

As long as Algebra and Geometry were separated, their progress was slow and their use limited; but once these sciences were united, they lent each other mutual support and advanced rapidly together towards perfection.

Joseph Lois Lagrange, 1975, *Oeuvres*, vol. 7, p. 271.

Durante a maior parte da sua história, a Matemática existiu cindida em duas áreas aparentemente incompatíveis entre si: a Geometria, dedicada às questões da forma, tamanho e posição de figuras no plano e no espaço, e a Álgebra, um ramo dedicado à resolução de problemas que nos dias de hoje podem ser traduzidos por intermédio de equações. Na citação com que abrimos o capítulo, Lagrange, citado em [33], afirma que a partir do momento em que estas duas áreas foram conciliadas a sua evolução foi muito mais célere, pois os avanços de uma disciplina constituíram contributos para a outra. Em [33], Lagrange, atribuindo esse mérito à geometria analítica de Descartes, acrescenta ainda:

We owe to Descartes the application of Algebra to Geometry; this has become the key to the greatest discoveries in all fields of Mathematics.

Joseph Lois Lagrange, 1975, *Oeuvres*, vol. 7, p. 271.

As palavras de Lagrange servem assim como inspiração para a apresentação do trabalho desta tese. Ao longo deste texto, procurámos aplicar a teoria das álgebras de Jordan euclidianas à família dos grafos fortemente regulares, no sentido de extrair novas conclusões sobre o espectro destes grafos, assim como novas condições de admissibilidade sobre o conjunto de parâmetros associado a um (ou eventualmente mais do que um) grafo

fortemente regular.

A adjetivação “fortemente regular” caracteriza adequadamente uma família de grafos regulares com uma propriedade adicional: o número de vizinhos comuns a um qualquer par de vértices u e v depende unicamente do facto de u e v serem ou não adjacentes. Esta definição deve-se a R. C. Bose e encontra-se publicada no artigo de 1963, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, [10]. Estes grafos podem ser interpretados como casos particulares de estruturas combinatórias mais complexas e gerais, particularmente esquemas associativos com duas classes.

Assim, dado um grafo fortemente regular, G , com n vértices e regularidade k , tal que cada par de vértices adjacentes tem a vizinhos e cada par de vértices não adjacentes tem c vizinhos, dizemos que G é fortemente regular com conjunto de parâmetros associado (n, k, a, c) .

A identificação de um grafo fortemente regular com um conjunto de parâmetros não é biunívoca, já que um mesmo conjunto de parâmetros pode definir mais do que um grafo fortemente regular. Por exemplo, conhecem-se pelo menos 105 grafos fortemente regulares, não isomorfos, com o conjunto de parâmetros $(36, 14, 4, 6)$.

A partir da definição apresentada por Bose é imediato concluirmos que não é qualquer conjunto de parâmetros que origina um grafo fortemente regular e, na verdade, os parâmetros de um grafo fortemente regular estão sujeitos a uma bateria de condições necessárias de existência, ditas condições de admissibilidade.

De entre todos os estudos efetuados nesta área, destacam-se o trabalho de relacionamento algébrico feito por Bose e Mesner, [9], o estudo sobre os valores próprios feito por Hoffman em [37] e a relação com grupos de permutação feita em [34] por D. G. Higman. Este trabalho conduziu à descoberta dos parâmetros de Krein de um grafo fortemente regular por Scott, em [55], cujas propriedades originaram as condições de admissibilidade de Krein. Em [59], Margaret Smith considerou grafos extremos de característica 3, fornecendo motivação para os trabalhos de Cameron et al, [15], e J. J. Seidel, [56]. O trabalho em [56], juntamente com [24], conduziu à descoberta dos denominados limites absolutos de Seidel, que constituem condições de admissibilidade sobre as multiplicidades dos valores próprios da matriz de adjacência de um grafo fortemente regular. Um estudo

sobre métodos de construção de grafos fortemente regulares foi produzido por Hubaut, em [40], e o leitor é ainda aconselhado a consultar os trabalhos de Cameron e van Lint, [14], Cameron, [16], e Goethals e Seidel, [30, 31], para outras relações entre grafos fortemente regulares e objetos combinatórios diversos. Para uma leitura detalhada sobre estes grafos sugere-se [4, 29, 45], para além da bibliografia supracitada.

Ainda assim, à luz de todo o trabalho desenvolvido sobre grafos fortemente regulares, existe um conjunto infinito de conjuntos de parâmetros que passam o crivo das condições de admissibilidade existentes, sem que saibamos se correspondem efetivamente a grafos fortemente regulares. De todos, o exemplo mais notável é sem dúvida o quarto grafo de Moore. Os grafos de Moore são uma família constituída por grafos de diâmetro d e cintura $2d + 1$ que são grafos fortemente regulares com parâmetros $(k^2 + 1, k, 0, 1)$. Os autores, que em 1960 introduziram os grafos de Moore, Hoffman e Singleton, [36], provaram ainda que esta família é constituída por, no máximo, quatro elementos, de regularidades 2, 3, 7 e 57. Enquanto que a existência dos três primeiros está demonstrada, desconhece-se a existência do quarto grafo de Moore até à presente data, cuja prova constituiria a resolução de um dos grandes problemas da Combinatória moderna. Mais geralmente, também não se sabe se existe mais algum grafo fortemente regular sem triângulos, isto é, com $a = 0$, para além dos três já referenciados.

Foi com esta motivação que surgiu o trabalho desta tese. Com o objetivo de encontrar novas condições de admissibilidade sobre o espectro e o conjunto de parâmetros de um grafo fortemente regular, procurámos estudar as propriedades das álgebras de Jordan euclidianas e a sua íntima relação com a álgebra gerada pela matriz identidade e pelas potências naturais da matriz de adjacência de um grafo fortemente regular.

As álgebras de Jordan euclidianas são simplesmente álgebras de Jordan munidas de um produto interno com uma propriedade transitiva. O conceito de álgebra de Jordan foi originalmente criado por Pascual Jordan, John von Neumann e Eugene Wigner no artigo *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, [42], para iluminar um aspecto particular da Física: os observáveis da Mecânica Quântica. Contudo, as álgebras de Jordan acabaram por estabelecer conexões inesperadas com muitas outras áreas da Matemática. Podemos citar as aplicações à Estatística, [49], aos métodos de

ponto interior, [27] e [28], e à Combinatória, [19]. Para um estudo detalhado sobre estas álgebras sugerem-se as notas de Koecher, [43], ou a monografia de Faraut e Korányi, [26].

A tese está organizada como se segue. No Capítulo 2 apresentamos a teoria das álgebras de Jordan euclidianas com o objetivo de fornecer as ferramentas necessárias ao desenvolvimento do Capítulo 4 e de fazer uma generalização do Teorema do Entrelaçamento de valores próprios de Cauchy a elementos de uma álgebra de Jordan euclidiana simples. Essa generalização consiste em considerarmos uma qualquer ordenação dos valores próprios de um elemento da álgebra, ao contrário do que sucede em [32].

Ao longo do Capítulo 3 apresentamos os conceitos básicos em Teoria dos Grafos, as principais propriedades da família dos grafos fortemente regulares, bem como algumas subfamílias interessantes de grafos fortemente regulares. Por fim, tomando em consideração que um grafo fortemente regular é um esquema associativo com duas classes, introduzimos estas estruturas combinatórias e deduzimos algumas propriedades novas sobre os parâmetros de Krein de um esquema associativo. Entre elas, destaca-se a obtenção de um novo majorante para alguns dos parâmetros de Krein de um esquema associativo com um qualquer número de classes. Provamos ainda que esse novo majorante não pode ser melhorado.

O Capítulo 4 contém os resultados fundamentais desta tese. Através da associação de uma álgebra de Jordan euclidiana à matriz de adjacência de um grafo fortemente regular, generalizamos os parâmetros de Krein de um grafo fortemente regular, generalização essa que nos permite obter um majorante mais apertado para alguns dos parâmetros de Krein. Também demonstramos que esse majorante é ótimo em alguns casos. São obtidas novas condições de admissibilidade sobre o espectro e sobre o conjunto de parâmetros de um grafo fortemente regular, utilizando a série binomial e outras séries funcionais aplicadas aos idempotentes do único sistema de Jordan associado à matriz de adjacência do grafo fortemente regular relativamente à álgebra de Jordan euclidiana em estudo. Estas novas condições permitiram-nos clarificar algumas propriedades do espectro de grafos fortemente regulares.

Finalmente, na Secção 4.7 do Capítulo 4, tecemos algumas considerações sobre o trabalho efetuado e os resultados obtidos, bem como lançamos algumas ideias de trabalho

futuro nesta área.

Capítulo 2

Álgebras de Jordan Euclidianas

Practical application is found by not looking for it and one can say that the whole progress of civilization rests on that principle.

Jacques Salomon Hadamard

Os primeiros registos de álgebras de Jordan datam de 1934 quando Pascual Jordan, John von Neumann e Eugene Wigner publicaram o artigo *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, [42]. Neste artigo, os autores procuraram deduzir as propriedades das matrizes hermíticas no contexto da mecânica quântica, sem o auxílio da álgebra matricial subjacente mas não observável. Desde então, as álgebras de Jordan têm sido aplicadas em diversos ramos da Matemática. Podemos citar as aplicações à Estatística, [49], aos métodos de ponto interior, [27] e [28], e à Combinatória, [19].

Neste capítulo vamos apresentar as definições de álgebra de Jordan, Secção 2.2, e de álgebra de Jordan euclidiana, Secção 2.3, bem como os principais resultados associados, incluindo algumas demonstrações que consideramos relevantes para a exposição da teoria. Para uma leitura mais detalhada sobre o tema sugerimos as notas de Koecher, [43], ou a monografia de Faraut e Korányi, [26].

No final deste Capítulo 2, na Secção 2.4, apresentamos uma generalização do Teorema do Entrelaçamento dos valores próprios às álgebras de Jordan Euclidianas simples (ver [32]). O Teorema do Entrelaçamento dos valores próprios assume uma importância central no trabalho desta tese, já que constitui a base para a prova dos resultados mais relevantes

do Capítulo 4.

Visto que toda a álgebra de Jordan é uma álgebra associativa em potência, como se observará mais adiante, vamos começar por estudar este tipo de álgebra, o que sucede ao longo da Secção 2.1.

2.1 Álgebras Associativas em Potência

Seja (V, \bullet) uma álgebra real de dimensão finita, onde \bullet é a operação bilinear definida por:

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto u \bullet v \end{aligned}$$

Ao longo deste texto designaremos a álgebra (V, \bullet) simplesmente por V sem prejuízo de se confundir a álgebra com o espaço vetorial.

Se V contiver um elemento, chamemos-lhe e , tal que

$$(\forall u \in V) : e \bullet u = u \bullet e = u,$$

então e designa-se por *elemento unidade* de V .

Se, para cada elemento u em V , a subálgebra gerada por u for associativa, então diz-se que V é uma álgebra *associativa em potência*.

Definem-se recursivamente as potências dos elementos de V do seguinte modo:

$$u^0 = e, \quad u^n = u \bullet u^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se V for uma álgebra associativa em potência, então para todo o elemento $u \in V$ e quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, verifica-se a igualdade

$$u^m \bullet u^n = u^{m+n}.$$

Para uma álgebra associativa em potência, V , com dimensão finita e com elemento unidade e , a *característica* de um elemento $u \in V$ é o menor natural k tal que o conjunto

$$\{e, u, u^2, \dots, u^k\}$$

é linearmente dependente e escreve-se $\text{car}(u) = k$. Como V tem dimensão finita, definimos a característica de V como sendo o número r tal que

$$r = \text{car}(V) = \max\{\text{car}(u) : u \in V\}.$$

Podemos, agora, distinguir os elementos cuja característica coincide com a da álgebra dos restantes elementos. Assim sendo, um elemento $u \in V$ diz-se *regular* se $\text{car}(u) = \text{car}(V)$.

Seja $\mathbb{R}[X]$ a álgebra sobre \mathbb{R} dos polinómios de uma variável com coeficientes reais. Para cada elemento $u \in V$ definimos a subálgebra de V gerada por u e e :

$$\mathbb{R}[u] = \{f(u) : f \in \mathbb{R}[X]\}.$$

A subálgebra $\mathbb{R}[u]$ é comutativa, associativa e existe uma relação de equivalência entre $\mathbb{R}[u]$ e $\mathbb{R}[X] \setminus I(u)$, onde $I(u)$ é o ideal definido por $I(u) = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(u) = 0\}$. Note-se que um *ideal* I de uma álgebra V é uma subálgebra de V , tal que $\forall u \in I, \forall v \in V, u \bullet v \in I$ e $v \bullet u \in I$.

Como cada ideal próprio de $\mathbb{R}[X]$ é principal, temos que $I(u)$ é gerado por um único polinómio mónico, \hat{p} , que é chamado de *polinómio mínimo* de u , pelo facto de ser o polinómio de menor grau que se anula em u . O grau do polinómio mínimo do elemento u é igual a $\text{car}(u)$.

O resultado seguinte caracteriza o polinómio mínimo dos elementos regulares de V .

Proposição 2.1.1. [26, Proposição II.2.1] *Seja (V, \bullet) uma álgebra real associativa em potência com característica r . O conjunto dos elementos regulares de V é aberto e denso em V . Existem polinómios a_1, a_2, \dots, a_r em V , tais que, para qualquer elemento regular $u \in V$, o polinómio mínimo de u é dado por*

$$\hat{p}(u, \lambda) = \lambda^r - a_1(u)\lambda^{r-1} + a_2(u)\lambda^{r-2} + \dots + (-1)^r a_r(u). \quad (2.1)$$

Os polinómios a_1, a_2, \dots, a_r são únicos e cada a_j é homogéneo de grau j .

Apesar da Proposição 2.1.1 contemplar apenas os elementos regulares de V , temos que o polinómio (2.1) anula-se também para qualquer elemento não regular de V . Uma vez que o conjunto dos elementos regulares de uma álgebra associativa em potência, V , é um

conjunto denso de V , dado $u \in V$ existe uma sucessão $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos regulares de V convergindo para u . Assim,

$$\hat{p}(u, u) = \hat{p}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{p}(u_n, u_n) = 0,$$

tal como é feito em [20]. O polinómio (2.1), aplicado a um elemento não regular u de V , chama-se o *polinómio característico* de u , e denota-se por $p(u, \lambda)$, visto poder não coincidir, neste caso, com o polinómio mínimo de u . As raízes de (2.1) designam-se os *valores próprios* de u . Note-se que, a menos de multiplicidades, o polinómio característico e o polinómio mínimo têm as mesmas raízes. Contudo, o polinómio mínimo divide sempre o polinómio característico do mesmo elemento. No caso do elemento $u \in V$ ser regular, o polinómio mínimo coincide com o polinómio característico.

Observação 2.1.1. *A justificação da utilização da nomenclatura “polinómio característico” advém da seguinte propriedade dos elementos regulares de V . Seja $L(u)$ o endomorfismo de V em V tal que $L(u)(v) = u \bullet v$. Dado um elemento regular $u \in V$, se considerarmos a subálgebra real de V , $\mathbb{R}[u]$, que é gerada pela base*

$$B = \{e, u, u^2, \dots, u^{r-1}\},$$

então a aplicação linear $L_0(u)$, restrição de $L(u)$ a $\mathbb{R}[u]$, é representada na base B por:

$$M_{L_0(u)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r-1}a_r(u) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r-2}a_{r-1}(u) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{r-3}a_{r-2}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1(u) \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar que o polinómio característico desta matriz coincide com o polinómio (2.1). Com efeito, calculando o determinante de $\lambda I - M_{L_0(u)}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
|\lambda I - M_{L_0(x)}| &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -(-1)^{r-1}a_r(u) \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & -(-1)^{r-2}a_{r-1}(u) \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & -(-1)^{r-3}a_{r-2}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_1(u) \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -(-1)^{r-2}a_{r-1}(u) \\ -1 & \cdots & 0 & -(-1)^{r-3}a_{r-2}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_1(u) \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)a_r(u) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1)^{r-1}a_r(u) + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -(-1)^{r-2}a_{r-1}(u) \\ -1 & \cdots & 0 & -(-1)^{r-3}a_{r-2}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_1(u) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^r a_r(u) + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -(-1)^{r-2}a_{r-1}(u) \\ -1 & \cdots & 0 & -(-1)^{r-3}a_{r-2}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_1(u) \end{vmatrix} \\
&= \cdots \\
&= (-1)^r a_r(u) + \lambda(-1)^{r-1}a_{r-1}(u) + \cdots + \lambda^r \\
&= \lambda^r - a_1(u)\lambda^{r-1} + a_2(u)\lambda^{r-2} + \cdots + (-1)^r a_r(u).
\end{aligned}$$

Para cada elemento u de uma álgebra real associativa em potência com elemento unidade, V , definimos o *traço* e o *determinante* de u como sendo os coeficientes $a_1(u)$ e $a_r(u)$, respetivamente, do polinómio característico de u . Denotamos $a_1(u)$ e $a_r(u)$ por $\text{tr}(u)$ e $\det(u)$, respetivamente.

Exemplo 2.1.1. Como o produto usual de matrizes é associativo, temos que o espaço das matrizes reais simétricas de ordem n , $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$, munido da operação bilinear

$$A \bullet B = \frac{AB + BA}{2} \quad (2.2)$$

é uma álgebra associativa em potência com $\text{car}(\text{Sym}(n, \mathbb{R})) = n$ e cuja unidade é a matriz identidade de ordem n , $e = I_n$.

A operação \bullet , definida em (2.2), designa-se por produto de Jordan. Note-se que, como $A \bullet A = AA$, as potências de A são iguais independentemente de se considerar o produto \bullet ou o produto usual de matrizes.

Como $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ é uma matriz simétrica, então A é diagonalizável e, portanto, existe uma matriz não singular U tal que

$$U^{-1} A U = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são os valores próprios de A . Assim, o polinómio característico de A é

$$p(A, \lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

enquanto que o polinómio mínimo é

$$\hat{p}(A, \lambda) = (\lambda - \alpha_{i_1})(\lambda - \alpha_{i_2}) \cdots (\lambda - \alpha_{i_m}),$$

em que todos os α_{i_j} são distintos, com $\{\alpha_{i_j} : 1 \leq j \leq m\} = \{\alpha_i : 1 \leq i \leq n\}$ e $1 \leq m \leq n$. Se $m = n$, então A é regular e $\hat{p}(A, \lambda) = p(A, \lambda)$. De facto, se A for regular, $p(A, \lambda)$ é dado por

$$p(A, \lambda) = \lambda^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ todos distintos.

2.2 Álgebras de Jordan

Uma álgebra real V diz-se uma *álgebra de Jordan* se a operação bilinear satisfizer as seguintes propriedades:

$$(J_1) \quad (\forall u, v \in V) : u \bullet v = v \bullet u;$$

$$(J_2) \quad (\forall u, v \in V) : u \bullet (u^2 \bullet v) = u^2 \bullet (u \bullet v).$$

As propriedades (J_1) e (J_2) podem ser apresentadas alternativamente como

$$(J_1)^* \quad (\forall u, v \in V) : L(u)(v) = L(v)(u),$$

$$(J_2)^* \quad (\forall u, v \in V) : L(u) (L(u^2)(v)) = L(u^2) (L(u)(v)),$$

onde $L(u)$ e $L(u^2)$ são dois endomorfismos

$$\begin{aligned} L(u) : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto u \bullet v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L(u^2) : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto u^2 \bullet v. \end{aligned}$$

Observação 2.2.1. Utilizando os parênteses de Lie, $[,]$, que denotam a operação

$$[A, B] = AB - BA,$$

onde A e B são representações de dois endomorfismos na mesma base, é possível reescrever a igualdade $(J_2)^*$ como

$$[L(u), L(u^2)] = O, \tag{2.3}$$

para cada $u \in V$, onde O designa o operador nulo.

Em geral uma álgebra de Jordan não é associativa. No entanto, dada uma álgebra associativa podemos transformá-la numa álgebra de Jordan, se a munirmos do produto de Jordan definido no Exemplo 2.1.1 em (2.2).

Exemplo 2.2.1. Se V é uma álgebra real associativa, então (V, \bullet) é uma álgebra de Jordan, sendo \bullet o produto de Jordan definido no Exemplo 2.1.1 em (2.2). Assim, como o produto usual de matrizes é associativo, temos que $Sym(n, \mathbb{R})$, munida do produto de Jordan, é uma álgebra de Jordan. De agora em diante, esta álgebra de Jordan será denotada por \mathcal{V}_n .

Em seguida vamos apresentar um exemplo de uma álgebra de Jordan sobre o espaço vetorial \mathbb{R}^n , com $n > 1$. Vários exemplos sobre esta álgebra encontram-se em [2].

Exemplo 2.2.2. Considerem-se os elementos $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, representados da forma

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \bar{x} \end{pmatrix},$$

com $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, e o produto de Jordan definido para estes elementos como

$$x \bullet y = \begin{pmatrix} x_0 \\ \bar{x} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_0 \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\top y \\ x_0 \bar{y} + y_0 \bar{x} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

Então, \mathbb{R}^n munido do produto (2.4) é uma álgebra de Jordan de característica 2 e cujo elemento unidade é

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta álgebra designa-se por álgebra de Spin e denota-se por \mathcal{L}^n . O polinómio característico de um elemento $x \in \mathcal{L}^n$ é dado por

$$p(x, \lambda) = \lambda^2 - 2x_0\lambda + x_0^2 - \|\bar{x}\|^2,$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana usual. Os valores próprios de cada elemento $x \in \mathcal{L}^n$ são dados por $x_0 \pm \|\bar{x}\|$ e temos ainda que $\text{tr}(x) = 2x_0$ e $\det(x) = x_0^2 - \|\bar{x}\|^2$.

Segue-se um primeiro resultado sobre álgebras de Jordan e que se reveste de alguma importância, nomeadamente no que se refere à demonstração de resultados ulteriores. A relevância do resultado que se segue levou-nos a apresentar uma demonstração detalhada do mesmo. Antes, porém, vamos introduzir a definição seguinte.

Para uma função f definida num conjunto aberto X de um espaço vetorial real V , definimos a derivada de f na direcção de $u \in V$ como

$$D_u f(x) = \left. \frac{d}{dt} f(x + tu) \right|_{t=0},$$

para cada $x \in X$.

Teorema 2.2.1. [26, Proposição II.1.1] *Se V é uma álgebra de Jordan, então, para todos os elementos u, v, w de V , são válidas as seguintes igualdades:*

- (i) $[L(u), L(v^2)] + 2[L(v), L(u \bullet v)] = 0$;
- (ii) $[L(u), L(v \bullet w)] + [L(w), L(u \bullet v)] + [L(v), L(w \bullet u)] = 0$;
- (iii) $L(u^2 \bullet v) - L(u^2)L(v) = 2(L(u \bullet v) - L(u)L(v))L(u)$.

Demonstração. Derivando a igualdade (2.3), da Observação 2.2.1, na direcção de $u \in V$, obtemos

$$\begin{aligned} D_u [L(v), L(v^2)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [L(v + tu), L((v + tu)^2)]_{t=0} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [L(v) + tL(u), L(v^2) + 2tL(v \bullet u) + t^2L(u^2)]_{t=0} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} ([L(v), L(v^2)] + 2t[L(v), L(v \bullet u)] + t[L(u), L(v^2)] \\ &\quad + 2t^2[L(u), L(v \bullet u)] + t^2[L(v), L(u^2)] + t^3[L(u), L(u^2)])_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

Aplicando a igualdade (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (t(2[L(v), L(v \bullet u)] + [L(u), L(v^2)]) \\ &\quad + t^2(2[L(u), L(v \bullet u)] + [L(v), L(u^2)]))_{t=0} = 0. \\ \Leftrightarrow 2[L(v), L(v \bullet u)] + [L(u), L(v^2)] &= 0, \end{aligned}$$

o que prova (i).

Utilizando um procedimento análogo, calculando a derivada D_w da identidade (i) na direcção de um vetor $w \in V$ e utilizando as igualdades (i) e (2.3) obtemos a igualdade (ii).

Quanto a (iii), aplicando à igualdade (i) um elemento w , a identidade resultante é:

$$\begin{aligned} & [L(u), L(v^2)](w) + 2[L(v), L(u \bullet v)](w) = 0 \\ \Leftrightarrow & L(u)L(v^2)(w) - L(v^2)L(u)(w) + 2L(v)L(u \bullet v)(w) - 2L(u \bullet v)L(v)(w) = 0 \\ \Leftrightarrow & L(u)(v^2 \bullet w) - L(v^2)(u \bullet w) = 2L(u \bullet v)(v \bullet w) - 2L(v)((u \bullet v) \bullet w). \end{aligned}$$

Usando a propriedade comutativa $(J_1)^*$ vem:

$$\begin{aligned} & L(v^2 \bullet w)(u) - L(v^2)(u \bullet w) = 2L(v \bullet w)(u \bullet v) - 2L(v)(w \bullet (u \bullet v)) \\ \Leftrightarrow & L(v^2 \bullet w)(u) - L(v^2)L(w)(u) = 2L(v \bullet w)L(v)(u) - 2L(v)L(w)L(v)(u), \end{aligned}$$

o que pode ser reescrito como

$$L(v^2 \bullet w) - L(v^2)L(w) = 2(L(v \bullet w) - L(v)L(w))L(v),$$

que é precisamente a identidade (iii) que pretendíamos provar. \square

De agora em diante, sempre que nos referirmos a uma álgebra de Jordan V , supomos que V é uma álgebra de Jordan real com dimensão finita e elemento unidade e .

O resultado seguinte mostra que se V for uma álgebra de Jordan, então V é uma álgebra associativa em potência.

Teorema 2.2.2. [26, Proposição II.1.2, (ii)] *Seja V uma álgebra de Jordan. Então V é uma álgebra associativa em potência.*

Através do Teorema 2.2.2, podemos associar a cada elemento $u \in V$ o respetivo polinómio característico e as definições de traço e determinante dadas na secção anterior.

Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade e e $u \in V$. Denota-se por $\mathbb{R}[u]$ a subálgebra de V gerada por e e por u .

Numa álgebra de Jordan real V diz-se que um elemento u é *invertível* se existe $v \in \mathbb{R}[u]$ tal que $u \bullet v = e$. Nestas condições v designa-se o *inverso* de u e denota-se por u^{-1} . Note-se que, como a álgebra $\mathbb{R}[u]$ é associativa, o inverso u^{-1} é único.

Teorema 2.2.3. [26, Proposição II.2.2] *Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade e e característica r . Então:*

- (i) $(\forall u \in V), (\forall x, y \in \mathbb{R}[u]) : \det(x \bullet y) = \det(x) \det(y);$
- (ii) $\text{tr}(e) = r;$
- (iii) $\det(e) = 1.$

O teorema seguinte mostra-nos como obter o elemento inverso de um elemento de uma álgebra de Jordan.

Teorema 2.2.4. [26, Proposição II.2.3] *Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade e e $u \in V$. Se $L(u)$ é invertível, então $u^{-1} = L^{-1}(u)(e).$*

O resultado seguinte fornece-nos um critério que nos permite decidir se um dado elemento é, ou não, invertível.

Teorema 2.2.5. [26, Proposição II.2.4] *Seja V uma álgebra de Jordan com elemento unidade e . O elemento $u \in V$ é invertível se e só se $\det(u) \neq 0$.*

Sendo V uma álgebra de Jordan, diz-se que $c \in V$ é um *idempotente* se $c^2 = c$. Como consequência das propriedades do Teorema 2.2.1 deduz-se o resultado seguinte.

Teorema 2.2.6. [26, Proposição III.1.3] *Se c é um idempotente de uma álgebra de Jordan V , então os valores próprios do operador linear $L(c)$ de V em V pertencem ao conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.*

Para $u \in V$ definimos a aplicação

$$P(u) = 2L^2(u) - L(u^2), \quad (2.5)$$

que se designa por *representação quadrática* de V , onde $L^2(u)$ representa a composição de $L(u)$ com ele próprio. Observe-se que os endomorfismos $L(u)$ e $P(u)$ comutam para a operação composição.

Exemplo 2.2.3. No caso da álgebra de Jordan \mathcal{V}_n , definida no Exemplo 2.2.1, a representação quadrática satisfaz a propriedade $P(A)(B) = ABA, \forall A, B \in \mathcal{V}_n$. De facto, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P(A)(B) &= 2L^2(A)(B) - L(A^2)(B) \\
&= 2L(A)(A \bullet B) - A^2 \bullet B \\
&= 2A \bullet \left(\frac{AB + BA}{2} \right) - \frac{A^2B + BA^2}{2} \\
&= \frac{A \left(\frac{AB + BA}{2} \right) + \left(\frac{AB + BA}{2} \right) A}{2} - \frac{A^2B + BA^2}{2} \\
&= \frac{A^2B + ABA + ABA + BA^2}{2} - \frac{A^2B + BA^2}{2} \\
&= ABA.
\end{aligned}$$

A prova desta propriedade permite-nos generalizá-la a uma qualquer álgebra associativa munida do produto de Jordan.

Proposição 2.2.1. [26, Proposição II.3.3] *Seja V uma álgebra de Jordan com elemento unidade e .*

(i) *Se $u, v \in V$ forem invertíveis, então $P(u)(v)$ é invertível e*

$$(P(u)(v))^{-1} = P(u^{-1})(v^{-1}).$$

(ii) *Para quaisquer elementos $u, v \in V$ temos*

$$P(P(v)(u)) = P(v)P(u)P(v).$$

Exemplo 2.2.4. Relativamente à álgebra de Jordan \mathcal{L}^n apresentada no Exemplo 2.2.2, temos que, identificando o operador linear $L(x)$ com a respetiva matriz,

$$L(x) = \begin{pmatrix} x_0 & \bar{x}^\top \\ \bar{x} & x_0 I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Assim, a representação quadrática de um elemento $x \in \mathcal{L}^n$ é a seguinte:

$$P(x) = 2L^2(x) - L(x^2) = \begin{pmatrix} x^\top x & 2x_0 \bar{x}^\top \\ 2x_0 \bar{x} & \det(x)I_{n-1} + 2\bar{x}\bar{x}^\top \end{pmatrix}.$$

2.3 Álgebras de Jordan Euclidianas

Uma álgebra de Jordan real V com elemento unidade diz-se uma *álgebra de Jordan euclidiana* se existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V , tal que $\forall u, v, w \in V$,

$$\langle u \bullet v, w \rangle = \langle v, u \bullet w \rangle.$$

Desta definição decorre que $\forall u \in V$, $L(u)$ é um operador autoadjunto, ou seja,

$$\langle L(u)(v), w \rangle = \langle v, L(u)(w) \rangle.$$

Exemplo 2.3.1. Seja $\mathcal{V}_n = \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ a álgebra de Jordan definida no Exemplo 2.2.1. Então, \mathcal{V}_n é euclidiana para o produto interno definido por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$, $\forall A, B \in \mathcal{V}_n$, onde tr denota o traço usual de matrizes e AB o produto usual entre as matrizes A e B , uma vez que, $\forall A, B, C \in \mathcal{V}_n$, temos que

- (i) $A \bullet B = B \bullet A$,
- (ii) $A \bullet (A^2 \bullet B) = A^2 \bullet (A \bullet B)$ e
- (iii) $\langle A \bullet B, C \rangle = \langle B, A \bullet C \rangle$.

Exemplo 2.3.2. A álgebra de Jordan \mathcal{L}^n , definida no Exemplo 2.2.2, é euclidiana para o produto interno usual no espaço \mathbb{R}^n : $\langle x, y \rangle = x^\top y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Em seguida, introduzimos algumas definições necessárias para apresentarmos alguns resultados. Dada uma álgebra de Jordan euclidiana V , um subconjunto não vazio Ω de V diz-se um *cone* se $x \in \Omega$ e $\lambda > 0$ implica que $\lambda x \in \Omega$. Um subconjunto S de V diz-se *convexo* se $x, y \in S$ e $0 < \lambda < 1$ implica que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$. Um subconjunto $\Omega \subset V$ é um *cone convexo* se for um cone e um conjunto convexo.

O *cone dual* de um cone convexo $\Omega \subset V$ é definido por

$$\Omega^\# = \{v \in V : \forall w \in \Omega, \langle w, v \rangle \geq 0\}.$$

Se $\Omega = \Omega^\#$, Ω diz-se *autodual*. Para além disso, Ω é um *cone convexo aberto* se Ω for um aberto.

O grupo dos automorfismos $G(\Omega) \subset GL(V)$ de um cone convexo aberto Ω é definido por $G(\Omega) = \{g \in GL(V) : g(\Omega) = \Omega\}$, onde $GL(V)$ representa o conjunto de todas as aplicações lineares invertíveis de V em V . Um cone aberto é *homogéneo* se $G(\Omega)$ age em Ω transitivamente, isto é, $\forall x, y \in \Omega, \exists g \in G(\Omega)$, tal que $g(x) = y$. Um cone convexo diz-se *simétrico* se for homogéneo e autodual.

Dada uma álgebra de Jordan euclidiana V , o *cone dos quadrados* de V é dado por

$$\Omega = \{u^2 : u \in V\}.$$

Tem-se que o cone dos quadrados é um cone convexo, homogéneo, auto-dual e, portanto, simétrico.

Observa-se ainda que o interior de Ω , $\mathring{\Omega}$, é dado por

$$\mathring{\Omega} = \{u^2 : u \text{ é invertível em } V\}.$$

Tal como é definido em [54], diz-se que u é *definido positivo* se $u \in \mathring{\Omega}$ e *semi-definido positivo* se $u \in \Omega$.

A partir da Proposição 2.2.1 podemos concluir o resultado seguinte.

Corolário 2.3.1. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana e $\mathring{\Omega}$ o interior do cone dos quadrados de V . Então:*

- (i) $P(u)(\mathring{\Omega}) = \mathring{\Omega}$, para u um elemento invertível de V ;
- (ii) Se $u \in \mathring{\Omega}$, então $P(u)$ é definido positivo;

onde P é a representação quadrática de V , definida em (2.5), e $\mathring{\Omega}$ denota o interior do cone dos quadrados de V .

Demonstração. Seja u um elemento invertível de V . Note-se que, se $\mathring{\Omega}$ é convexo, então também $P(u)(\mathring{\Omega})$ é convexo.

- (i) Seja $w \in P(u)(\mathring{\Omega})$. Então, existe $v \in \mathring{\Omega}$ tal que $w = P(u)(v)$. Pela Proposição 2.2.1, temos que w é um elemento invertível de V . Como $u^2 = P(u)(e)$, temos que u^2 pertence simultaneamente a $\mathring{\Omega}$ e a $P(u)(\mathring{\Omega})$. Concluimos, assim, que $P(u)(\mathring{\Omega}) \subset \mathring{\Omega}$.

Agora, seja $v \in \mathring{\Omega}$. Temos que $P(u)(v) \in P(u)(\mathring{\Omega}) \subset \mathring{\Omega}$. Logo,

$$v = (P(u))^{-1}P(u)(v) \in (P(u))^{-1}(\mathring{\Omega}),$$

pelo que se tem que $\mathring{\Omega} \subset P(u)(\mathring{\Omega})$. Concluimos que $P(u)(\mathring{\Omega}) = \mathring{\Omega}$.

(ii) Seja $u \in \mathring{\Omega}$. Então, $u = v^2$, com v invertível. Logo, $P(u) = P(v^2) = (P(v))^2$. Como v é invertível, então $P(v)$ também o é (ver [26, Proposição II.3.1]) e, assim, podemos concluir que $P(u)$ é definido positivo.

□

Pelo Teorema 2.2.6 conclui-se que, se c é um idempotente de uma álgebra de Jordan real, V , então o operador linear $L(c)$ de V em V só admite valores próprios $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = 1$. Considere-se, então, uma álgebra de Jordan euclidiana V , e os subespaços invariantes do operador $L(c)$, sendo c um idempotente de V , relativamente a cada um dos seus valores próprios:

- $V(c, 0) = \{u \in V : L(c)(u) = 0\}$,
- $V(c, \frac{1}{2}) = \{u \in V : L(c)(u) = \frac{1}{2}u\}$,
- $V(c, 1) = \{u \in V : L(c)(u) = u\}$.

Como $L(c)$ é um operador autoadjunto relativamente ao produto interno de V , então os subespaços invariantes associados aos valores próprios distintos de $L(c)$ são ortogonais dois a dois e, além disso, V é a soma directa destes subespaços, ou seja,

$$V = V(c, 0) \oplus V\left(c, \frac{1}{2}\right) \oplus V(c, 1).$$

Esta decomposição de V é chamada a *decomposição de Peirce* de V relativamente ao idempotente c .

Exemplo 2.3.3. Seja $\mathcal{V}_n = \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ a álgebra de Jordan euclidiana definida no Exemplo 2.3.1. Com $n = p + q$, $p, q \in \mathbb{N}$, consideramos a matriz

$$C = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz C é uma matriz idempotente e, então,

$$\begin{aligned} V(C, 0) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \text{ é uma matriz simétrica } q \times q \right\} \\ V(C, 1) &= \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : B \text{ é uma matriz simétrica } p \times p \right\} \\ V\left(C, \frac{1}{2}\right) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^T & 0 \end{pmatrix} : D \text{ é uma matriz } p \times q \right\}. \end{aligned}$$

Como V é uma álgebra de Jordan euclidiana, os subespaços invariantes $V(c, 0)$, $V\left(c, \frac{1}{2}\right)$ e $V(c, 1)$ verificam as seguintes propriedades, que se provam através do Teorema 2.2.1, organizadas na proposição seguinte. Sejam U e W subespaços de V . Considera-se a notação seguinte:

$$U \bullet W = \{u \bullet w, u \in U, w \in W\}.$$

Proposição 2.3.1. [26, Proposição IV.1.1] *Seja V uma álgebra de Jordan real euclidiana com elemento unidade e seja c um idempotente. Então as propriedades seguintes são verdadeiras:*

- (i) $V(c, 0)$ e $V(c, 1)$ são subálgebras de V ;
- (ii) $V(c, 0) \bullet V(c, 1) = \{0\}$;
- (iii) $(V(c, 0) \oplus V(c, 1)) \bullet V\left(c, \frac{1}{2}\right) \subseteq V\left(c, \frac{1}{2}\right)$;
- (iv) $V\left(c, \frac{1}{2}\right) \bullet V\left(c, \frac{1}{2}\right) \subseteq V(c, 1) \oplus V(c, 0)$.

O resultado seguinte define os projetores ortogonais de V em cada um dos subespaços próprios de V relativamente ao operador $L(c)$, com c um idempotente de V .

Proposição 2.3.2. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade e e c um idempotente de V . Então $P(e - c)$, $I - P(c) - P(e - c)$ e $P(c)$ são os projetores ortogonais em $V(c, 0)$, $V\left(c, \frac{1}{2}\right)$ e $V(c, 1)$, respetivamente, em que I representa o operador identidade.*

Demonstração. Devido à definição de $P(u)$ em (2.5) tem-se:

$$P(\mathbf{e} - c) = (L(c) - I)(2L(c) - I) \quad (2.6)$$

$$I - P(\mathbf{e} - c) - P(c) = 4L(c)(I - L(c)) \quad (2.7)$$

$$P(c) = L(c)(2L(c) - I) \quad (2.8)$$

De agora em diante vamos denotar: $P_0 = P(\mathbf{e} - c)$, $P_{\frac{1}{2}} = I - P(\mathbf{e} - c) - P(c)$ e $P_1 = P(c)$.

Os operadores P_i , $i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ verificam as propriedades (i)-(v):

$$(i) \ P_i^2 = P_i, \forall i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\};$$

$$(ii) \ P_i P_j = P_j P_i, \forall i, j \in \{0, \frac{1}{2}, 1\};$$

$$(iii) \ P_i P_j = O, \forall i \neq j \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \text{ onde } O \text{ designa o operador nulo};$$

$$(iv) \ P_0, P_{\frac{1}{2}} \text{ e } P_1 \text{ são operadores autoadjuntos relativamente ao produto interno de } V;$$

$$(v) \ P_i(V) \subset V(c, i) \wedge P_i(u) = u, \forall u \in V(c, i), \forall i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}.$$

(i) Pela Proposição 2.2.1, tem-se que, se u for um idempotente de V , então:

$$P^2(u) = P(u).$$

Logo, $P^2(c) = P(c)$ e $P^2(\mathbf{e} - c) = P(\mathbf{e} - c)$. Agora necessitamos de mostrar que

$$P(c)P(\mathbf{e} - c) = O. \quad (2.9)$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} P(c)P(\mathbf{e} - c) &= (2L^2(c) - L(c))(I - 3L(c) + 2L^2(c)) \\ &= (2L(c) - I)L(c)(I - 3L(c) + 2L^2(c)) \\ &= O, \end{aligned}$$

visto que, pelo Teorema 2.2.6, os valores próprios de $L(c)$ são 0, $1/2$ e 1. Logo, $(I - P(\mathbf{e} - c) - P(c))^2 = I - P(\mathbf{e} - c) - P(c)$.

(ii) Por (2.6)-(2.8), concluímos que os operadores P_i , com $i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ são polinómios do segundo grau em $L(c)$ e I e, portanto, comutam entre si.

(iii) Pela igualdade (2.9) já temos que $P_0P_1 = O$. Para além disso,

$$\begin{aligned}
 P_1P_{\frac{1}{2}} &= P(c)(I - P(\mathbf{e} - c) - P(c)) \\
 &= P(c) - P(c)P(\mathbf{e} - c) - P^2(c) \\
 &= P(c) - O - P(c) \\
 &= O
 \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
 P_0P_{\frac{1}{2}} &= P(\mathbf{e} - c)(I - P(\mathbf{e} - c) - P(c)) \\
 &= P(\mathbf{e} - c) - P^2(\mathbf{e} - c) - P(\mathbf{e} - c)P(c) \\
 &= P(\mathbf{e} - c) - P(\mathbf{e} - c) - O \\
 &= O,
 \end{aligned}$$

devido a (2.9) e (i).

(iv) Como $L(c)$ é um operador autoadjunto relativamente ao produto interno de V , então, os operadores P_i , com $i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, são também autoadjuntos relativamente ao mesmo produto interno de V .

(v) Seja $u \in V$ e $u = u_0 + u_{\frac{1}{2}} + u_1$ a decomposição de Peirce de u relativamente a c . Assim,

$$\begin{aligned}
 L(c)P_1(u) &= L(c)P(c)(u) = L(c)L(c)(2L(c) - I)(u_0 + u_{\frac{1}{2}} + u_1) \\
 &= L(c)L(c)(0 + u_{\frac{1}{2}} + 2u_1 - u_0 - u_{\frac{1}{2}} - u_1) \\
 &= L(c)L(c)(u_1 - u_0) \\
 &= L(c)(u_1 - 0) \\
 &= L(c)(u_1) \\
 &= u_1 = P(c)(u) = P_1(u)
 \end{aligned}$$

Logo, $P_1(u) \in V(c, 1)$ e, portanto, $P_1(V) \subset V(c, 1)$. Note-se que $P(c)(u) = u$, para $u \in V(c, 1)$. Do mesmo modo, prova-se que $P_i(V) \subset V(c, i)$ e que $P_i(u) = u$, com $i \in \{0, \frac{1}{2}\}$ e para qualquer $u \in V(c, i)$.

□

Diz-se que $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ é um *sistema de idempotentes ortogonais completo* se for um conjunto de idempotentes ortogonais dois a dois e completo, no sentido de que a soma de todos os elementos é o elemento unidade. Por outras palavras, o conjunto $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ tem que verificar as seguintes igualdades:

- (i) $c_i^2 = c_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$;
- (ii) $c_i \bullet c_j = 0, \forall i \neq j$;
- (iii) $c_1 + c_2 + \dots + c_k = \mathbf{e}$.

Note-se que a soma de idempotentes ortogonais relativamente à álgebra é também um idempotente. Para além disso se $c, d \in V$ são ortogonais relativamente à álgebra, então também são ortogonais relativamente ao produto interno.

Um idempotente c é *primitivo* se é um idempotente não nulo e não se pode escrever como a soma de dois idempotentes ortogonais não nulos. O conjunto dos idempotentes primitivos de V denota-se por $\mathcal{J}(V)$.

Diz-se que $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ é um sistema de idempotentes primitivos ortogonais completo ou um *sistema de Jordan*, se for um sistema de idempotentes ortogonais completo em que cada $c_i, i \in \{1, \dots, k\}$, é primitivo.

Exemplo 2.3.4. As matrizes $C_1, C_2, C_3 \in \text{Sym}(3, \mathbb{R})$, dadas por

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

formam um sistema de Jordan, já que, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ tem-se que

- $C_i^2 = C_i$,
- $C_i \bullet C_j = 0, \forall i \neq j$,
- $C_1 + C_2 + C_3 = I_3$,
- C_i é primitivo.

Considere-se a matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O conjunto $\{D, C_3\}$ não é um sistema de Jordan pois D não é primitivo pois $D = C_1 + C_2$, mas é um conjunto de idempotentes ortogonais completo.

Seguem-se dois resultados fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Como se verá em seguida, dado um elemento u de uma álgebra de Jordan euclidiana V , existe um único conjunto de idempotentes ortogonais completo, assim como um sistema de Jordan, tais que o elemento u pode ser escrito como combinação linear quer de um, quer de outro.

Teorema 2.3.1. [26, Proposição III.1.1 (Teorema Espectral, primeira versão)] *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade e e $u \in V$. Então existem k números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, únicos, todos distintos, e um único sistema de idempotentes ortogonais completo $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$, não necessariamente primitivos, tais que*

$$u = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_k c_k,$$

com $c_j \in \mathbb{R}[u]$, para $j \in \{1, \dots, k\}$.

Relativamente a este teorema, os números λ_j são os valores próprios de u e $\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i$ diz-se a primeira decomposição espectral de u .

Teorema 2.3.2. [26, Proposição III.1.2 (Teorema Espectral, segunda versão)] *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e elemento unidade e , então, para cada $u \in V$, existe um sistema de Jordan $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ e números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ tais que*

$$u = \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j.$$

Os λ_j 's, com as suas multiplicidades, são univocamente determinados por u . Adicionalmente verifica-se que:

- $\det(u) = \prod_{j=1}^r \lambda_j$;
- $\text{tr}(u) = \sum_{j=1}^r \lambda_j$;

- $a_k(u) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k};$

onde os coeficientes $a_k(u)$, $k \in \{1, \dots, r\}$, são os coeficientes do polinómio característico.

Relativamente ao Teorema 2.3.2, $\sum_{j=1}^r \lambda_j c_j$ diz-se a *segunda decomposição espectral* de u . Observe-se que, quer no Teorema 2.3.2 como no Teorema 2.3.1, os λ_j 's não são mais do que as raízes do polinómio característico:

$$p(u, \lambda) = \lambda^r - a_1(u)\lambda^{r-1} + \dots + (-1)^r a_r(u).$$

Note-se, porém, que no Teorema 2.3.1 os λ_j 's são as raízes distintas de $p(u, \lambda)$, enquanto que no Teorema 2.3.2 entram em consideração as multiplicidades das raízes de $p(u, \lambda)$.

Uma propriedade fundamental das álgebras de Jordan euclidianas, que decorre da prova do Teorema 2.3.2, é que qualquer sistema de Jordan tem o mesmo número de elementos.

Teorema 2.3.3. [18] *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r . Se $\{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ é um sistema de Jordan de V , então $t = r$.*

Exemplo 2.3.5. *Seja \mathcal{V}_n a álgebra de Jordan euclidiana definida no Exemplo 2.3.1. Como cada matriz simétrica $A \in \mathcal{V}_n$ pode ser diagonalizável através de uma matriz ortogonal Q , tal que $A = QDQ^\top$, com $Q \in \mathcal{V}_n$ e $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, podemos escrever A como*

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i q_i^\top, \quad (2.10)$$

onde os α_i são os valores próprios de A e os q_i , são os vetores próprios correspondentes que ocupam as respetivas colunas da matriz Q . A igualdade (2.10) traduz a segunda versão da decomposição espectral de A , já que $\{q_1 q_1^\top, q_2 q_2^\top, \dots, q_n q_n^\top\}$ é um sistema de Jordan.

Relativamente à primeira versão da decomposição espectral de A , considerem-se os valores próprios distintos de A , $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_l$, onde cada α_i tem multiplicidade m_i . Suponhamos também que cada α_i tem associado o conjunto de vetores próprios ortogonais $q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{im_i}$. Definimos o sistema completo de idempotentes ortogonais $\{P_i, i \in \{1, \dots, l\}\}$, tal que

$$P_i = \sum_{j=i_1}^{i_{m_i}} q_j q_j^\top.$$

Então

$$A = \sum_{j=1}^l \alpha_j P_j$$

é a primeira versão da decomposição espectral de A .

Exemplo 2.3.6. Seja \mathcal{L}^n , a álgebra de Jordan euclidiana definida nos Exemplos 2.2.2 e 2.3.2. \mathcal{L}^n tem um sistema de Jordan dado por

$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \end{pmatrix} \right\}$$

e cada elemento $x \in \mathcal{L}^n$ tem a seguinte segunda decomposição espectral:

$$x = \frac{1}{2}(x_0 + \|\bar{x}\|) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_0 - \|\bar{x}\|) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \end{pmatrix}.$$

O resultado seguinte, que demonstramos, caracteriza os valores próprios dos elementos de Ω e $\mathring{\Omega}$, respetivamente.

Teorema 2.3.4. Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana, $u \in V$, $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais e $\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i$ a primeira decomposição espectral de u . Então:

- (i) $u \in \Omega$ se e só os λ_i 's forem todos não negativos e
- (ii) $u \in \mathring{\Omega}$ se e só os λ_i 's forem todos positivos.

Demonstração. (i) Se na primeira decomposição espectral de u cada λ_i , $1 \leq i \leq k$, for não negativo, então podemos escrever

$$u = \left(\sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} c_i \right)^2.$$

Logo, $u \in \Omega$ e, portanto, é semi-definido positivo.

Reciprocamente, se $u \in \Omega$, então $u = v^2$, para algum $v \in V$. Considere-se a primeira decomposição espectral de v igual a $\sum_{i=1}^l \mu_i d_i$. Logo,

$$v^2 = \sum_{i=1}^l \mu_i^2 d_i,$$

pelo que

$$u = \sum_{i=1}^l u_i c_i$$

com $u_i = \mu_i^2$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Assim, todos os valores próprios da primeira decomposição espectral de u são não negativos.

(ii) Se $u \in \mathring{\Omega}$, então $u \in \Omega$ e, por (i) temos que

$$u = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i,$$

com $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Como u é invertível, então cada $\lambda_i \neq 0$. Logo, concluímos que $\lambda_i > 0$. Reciprocamente, se

$$u = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i,$$

com $\lambda_i > 0$, $i \in \{1, \dots, k\}$, então podemos escrever que

$$u = \left(\sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} c_i \right)^2.$$

Logo, $u \in \Omega$ e como $\sqrt{\lambda_i} \neq 0$, $i \in \{1, \dots, k\}$, temos que $u \in \mathring{\Omega}$.

□

Uma das questões que se podem colocar sobre álgebras de Jordan euclidianas consiste em saber se, dado um idempotente primitivo c , é possível construir um sistema de Jordan que contenha c .

Teorema 2.3.5. [18] *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade e e seja c um seu idempotente não trivial. Então, $V(c, 1)$ tem dimensão um se e só se c é um idempotente primitivo de V .*

A partir do Teorema 2.3.5 demonstra-se o resultado seguinte que confirma que a partir de um idempotente primitivo de uma álgebra de Jordan euclidiana podemos construir um sistema de Jordan que o inclua.

Teorema 2.3.6. [18] *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e c um seu idempotente primitivo. Então, a subálgebra $V(c, 0)$ de V tem característica $r - 1$.*

O resultado que se segue mostra que qualquer idempotente primitivo de uma álgebra de Jordan euclidiana tem traço 1.

Teorema 2.3.7. [18] *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana e c é um idempotente primitivo de V , então $\text{tr}(c) = 1$.*

Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade e e $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ um sistema de Jordan de V . Visto que os operadores $L(c_i)$ comutam (ver [26, Lema IV.1.3]), então são simultaneamente diagonalizáveis. Podemos então considerar os seguintes subespaços de V :

$$\begin{aligned} V_{ii} &= V(c_i, 1) = \mathbb{R}c_i, \\ V_{ij} &= V\left(c_i, \frac{1}{2}\right) \cap V\left(c_j, \frac{1}{2}\right), \quad i < j, \end{aligned}$$

que se chamam os *subespaços de Peirce* de V .

Teorema 2.3.8. [26, Teorema IV.2.1] *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade e e $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ um sistema de Jordan de V . Então:*

(i) *V decompõe-se na seguinte soma direta ortogonal:*

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ij}.$$

(ii) *Verificam-se as propriedades*

$$\begin{aligned} V_{ij} \bullet V_{ij} &\subset V_{ii} + V_{jj}, \\ V_{ij} \bullet V_{jk} &\subset V_{ik}, \text{ se } i \neq k, \\ V_{ij} \bullet V_{kl} &= \{0\}, \text{ se } \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Ao longo deste texto denotamos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n e entradas reais e por $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas reais.

Exemplo 2.3.7. Seja $\mathcal{V}_n = \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ a álgebra de Jordan euclidiana definida no Exemplo 2.3.1. Considerem-se as matrizes $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tais que $(E_{ij})_{lm} = \delta_{il}\delta_{jm}$, com $i, j, l, m \in \mathbb{N}$, onde $(A)_{ij}$ representa a entrada (i, j) da matriz A e δ_{ij} representa o símbolo de Kronecker: $\delta_{ij} = 1$, se e só se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$, caso contrário. Então,

$$S = \{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\}$$

é um sistema de Jordan de \mathcal{V}_n e os subespaços de Peirce de \mathcal{V}_n associados a S são,

$$V_{ii} = \{X_{ii} \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}) : X_{ii} = x_{ii}E_{ii}, x_{ii} \in \mathbb{R}\}$$

e

$$V_{ij} = \{X_{ij} \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}) : X_{ij} = x_{ij}(E_{ij} + E_{ji}), x_{ij} \in \mathbb{R}\},$$

se $i \neq j$. A decomposição de Peirce de uma matriz simétrica associada a S é dada por

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_{ii}E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij}(E_{ij} + E_{ji}).$$

Exemplo 2.3.8. Relativamente à álgebra de Jordan euclidiana \mathcal{L}^n apresentada no Exemplo 2.2.2 temos que, para qualquer sistema de Jordan $\{c_1, c_2\}$ de \mathcal{L}^n existe um vetor com norma unitária $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que

$$c_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \text{ e } c_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -u \end{pmatrix}.$$

Assim, a decomposição de Peirce de um elemento $x \in \mathcal{L}^n$ relativamente ao sistema de Jordan $\{c_1, c_2\}$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_0 \\ \bar{x} \end{pmatrix} = x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_{12} \\ &= x_1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} + x_2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ é tal que $\langle u, v \rangle = 0$.

Uma álgebra de Jordan euclidiana V diz-se *simples* se não admitir nenhum ideal trivial. Como consequência, se V for simples, V não pode ser a soma direta de duas outras álgebras de Jordan euclidianas. Para estas álgebras temos o resultado seguinte e, mais adiante, uma classificação exaustiva.

Note-se que, dada uma forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$, onde V é uma álgebra de Jordan euclidiana sobre um corpo \mathbb{F} , B é *associativa* se $B(uv, w) = B(u, vw)$, $\forall u, v, w \in V$ e *simétrica* se $B(u, v) = B(v, u)$, $\forall u, v \in V$.

Proposição 2.3.3. [26, Proposição III.4.1] *Numa álgebra de Jordan euclidiana simples, V , qualquer forma bilinear simétrica associativa, $B(u, v)$, é um múltiplo escalar de $\text{tr}(uv)$.*

Sejam V uma álgebra de Jordan e E um espaço vetorial, ambos sobre um corpo \mathbb{F} . Uma *representação* de V sobre E é uma aplicação linear $\phi : V \rightarrow \text{End}(E)$, tal que

$$\phi(u \bullet v) = \frac{\phi(u)\phi(v) + \phi(v)\phi(u)}{2}, \quad (2.11)$$

onde $\text{End}(E)$ denota o conjunto dos endomorfismos de E . A aplicação ϕ é um homomorfismo, entre a álgebra de Jordan V e $\text{End}(E)$, munido do produto de Jordan. Se uma tal representação ϕ existe, V diz-se *representável*.

Ao longo dos exemplos seguintes, vamos apresentar três exemplos de álgebras de Jordan euclidianas simples representáveis e um exemplo de uma álgebra de Jordan euclidiana simples não representável. Estes exemplos são baseados fundamentalmente no capítulo 8 de [65].

Exemplo 2.3.9. *Uma matriz quadrada A com entradas complexas diz-se hermitica se satisfizer $A = \bar{A}^\top$, onde \bar{A} denota a matriz conjugada complexa de A . Denotamos por $\text{Herm}(n, \mathbb{C})$, o espaço vetorial real das matrizes hermiticas $n \times n$ de entradas complexas.*

Cada elemento de $\text{Herm}(n, \mathbb{C})$ pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} x_1 & z_{12} & z_{13} & \cdots & z_{1n} \\ \bar{z}_{12} & x_2 & z_{23} & \cdots & z_{2n} \\ \bar{z}_{13} & \bar{z}_{23} & x_3 & \cdots & z_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{z}_{1n} & \bar{z}_{2n} & \bar{z}_{3n} & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

onde $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ e $z_{ij} \in \mathbb{C}, \forall i, j \in \mathbb{N}$. Este espaço pode ser mergulhado no espaço das matrizes simétricas da seguinte forma. Começamos por notar que o conjunto \mathbb{C} pode ser mergulhado no espaço $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ através do monomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ a + bi &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sob a adição e multiplicação usuais de matrizes. Assim, dada uma matriz $A \in \text{Herm}(n, \mathbb{C})$, podemos substituir cada entrada complexa de A pela matriz 2×2 correspondente, obtendo uma matriz real simétrica $2n \times 2n$ através do monomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \text{Herm}(n, \mathbb{C}) &\rightarrow \text{Sym}(2n, \mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \overline{z_{12}} & x_2 & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{z_{1n}} & \overline{z_{2n}} & \cdots & x_n \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 & 0 & a_{12} & b_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1n} \\ 0 & x_1 & -b_{12} & a_{12} & \cdots & -b_{1n} & a_{1n} \\ a_{12} & -b_{12} & x_2 & 0 & \cdots & a_{2n} & b_{2n} \\ b_{12} & a_{12} & 0 & x_2 & \cdots & -b_{2n} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & -b_{1n} & a_{2n} & -b_{2n} & \cdots & x_n & 0 \\ b_{1n} & a_{1n} & b_{2n} & a_{2n} & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $z_{kl} = a_{kl} + ib_{kl}$, com $k, l \in \mathbb{N}$.

Temos que a imagem resultante desta aplicação ψ , munida do produto de Jordan, (2.2), é uma subálgebra de $\text{Sym}(2n, \mathbb{R})$ com característica n e elemento unidade I_n .

A aplicação ϕ , de $\text{Herm}(n, \mathbb{C})$ no conjunto dos endomorfismos de \mathbb{R}^{2n} , que associa a cada elemento $Z \in \text{Herm}(n, \mathbb{C})$ o endomorfismo linear de \mathbb{R}^{2n} , f_Z , cuja matriz na base canónica de \mathbb{R}^{2n} é $\psi(Z)$, é uma representação de $\text{Herm}(n, \mathbb{C})$ que satisfaz a propriedade (2.11) e, portanto, $\text{Herm}(n, \mathbb{C})$ é uma álgebra de Jordan representável.

Finalmente, $\text{Herm}(n, \mathbb{C})$ torna-se uma álgebra de Jordan euclidiana simples se a munirmos com o produto interno

$$\langle A, B \rangle = \text{Re tr}(AB), \quad (2.12)$$

em que $\text{Re}(z)$ denota a parte real do elemento $z \in \mathbb{C}$.

Exemplo 2.3.10. O espaço vetorial dos quaterniões, denotado por \mathbb{H} , é uma álgebra de dimensão 4 sobre \mathbb{R} com base $\{1, i, j, k\}$, onde i, j e k representam unidades imaginárias satisfazendo as regras de multiplicação da Tabela 2.3.1.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tabela 2.3.1: Tabela de multiplicação dos elementos da base de \mathbb{H} .

A regra multiplicativa subjacente é ilustrada na Figura 2.3.1.

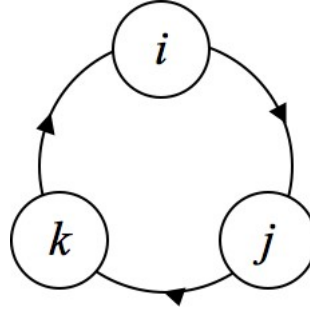


Figura 2.3.1: Regra da multiplicação de quaterniões.

Quando multiplicamos dois elementos no sentido dos ponteiros do relógio obtemos o seguinte. Reciprocamente se multiplicarmos dois elementos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio obtemos o elemento simétrico do seguinte.

A álgebra \mathbb{H} é associativa mas não comutativa. Para qualquer elemento $q = a1 + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, define-se a parte real, o conjugado e a norma de q por:

$$\text{Re}(q) = a,$$

$$\bar{q} = a1 - bi - cj - dk,$$

$$||q|| = \sqrt{q \bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

respetivamente. Como $||pq|| = ||p|| ||q||$, \mathbb{H} diz-se uma álgebra normada de divisão.

Uma matriz quadrada cujas entradas são quaterniões diz-se hermítica se coincidir com

a sua matriz conjugada transposta. Denotamos o espaço destas matrizes $n \times n$ por $Herm(n, \mathbb{H})$.

Cada matriz de $Herm(n, \mathbb{H})$ pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} x_1 & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ \overline{q_{12}} & x_2 & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ \overline{q_{13}} & \overline{q_{23}} & x_3 & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{q_{1n}} & \overline{q_{2n}} & \overline{q_{3n}} & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

onde $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ e $q_{ij} \in \mathbb{H}, \forall i, j \in \mathbb{N}$.

Tal como no Exemplo 2.3.9, também $Herm(n, \mathbb{H})$ pode ser mergulhado no espaço das matrizes simétricas. Efetivamente, cada elemento de \mathbb{H} pode ser escrito como uma matriz 4×4 através do monomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ a1 + bi + cj + dk &\mapsto \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sob a adição e multiplicação usuais de matrizes. Logo, dada uma matriz $A \in Herm(n, \mathbb{H})$, podemos substituir cada quaternião de cada entrada de A pela matriz 4×4 correspondente, obtendo uma matriz real simétrica $4n \times 4n$, através do monomorfismo ψ , de $Herm(n, \mathbb{H})$ em $Sym(4n, \mathbb{R})$, tal que cada matriz

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ \overline{q_{12}} & x_2 & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{q_{1n}} & \overline{q_{2n}} & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

é enviada na matriz $\psi(H)$, dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & b_{12} & c_{12} & d_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1n} & c_{1n} & d_{1n} \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & -b_{12} & a_{12} & -d_{12} & c_{12} & \cdots & -b_{1n} & a_{1n} & -d_{1n} & c_{1n} \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & -c_{12} & d_{12} & a_{12} & -b_{12} & \cdots & -c_{1n} & d_{1n} & a_{1n} & -b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & -d_{12} & -c_{12} & b_{12} & a_{12} & \cdots & -d_{1n} & -c_{1n} & b_{1n} & a_{1n} \\ a_{12} & -b_{12} & -c_{12} & -d_{12} & x_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n} & b_{2n} & c_{2n} & d_{2n} \\ b_{12} & a_{12} & d_{12} & -c_{12} & 0 & x_2 & 0 & 0 & \cdots & -b_{2n} & a_{2n} & -d_{2n} & c_{2n} \\ c_{12} & -d_{12} & a_{12} & b_{12} & 0 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & -c_{2n} & d_{2n} & a_{2n} & -b_{2n} \\ d_{12} & c_{12} & -b_{12} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & x_2 & \cdots & -d_{2n} & -c_{2n} & b_{2n} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & -b_{1n} & -c_{1n} & -d_{1n} & a_{2n} & -b_{2n} & -c_{2n} & -d_{2n} & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ b_{1n} & a_{1n} & d_{1n} & -c_{1n} & b_{2n} & a_{2n} & d_{2n} & -c_{2n} & \cdots & 0 & x_n & 0 & 0 \\ c_{1n} & -d_{1n} & a_{1n} & b_{1n} & c_{2n} & -d_{2n} & a_{2n} & b_{2n} & \cdots & 0 & 0 & x_n & 0 \\ d_{1n} & c_{1n} & -b_{1n} & a_{1n} & d_{2n} & c_{2n} & -b_{2n} & a_{2n} & \cdots & 0 & 0 & 0 & x_n \end{pmatrix},$$

onde $q_{lm} = a_{lm}1 + b_{lm}i + c_{lm}j + d_{lm}k$, com $l, m \in \mathbb{N}$. A imagem resultante desta aplicação ψ , munida do produto de Jordan, (2.2), é uma subálgebra de $Sym(4n, \mathbb{R})$ com característica n .

A aplicação ϕ , de $Herm(n, \mathbb{H})$ no conjunto dos endomorfismos de \mathbb{R}^{4n} , que associa a cada elemento $H \in Herm(n, \mathbb{H})$ o endomorfismo linear de \mathbb{R}^{4n} , f_H , cuja matriz na base canónica de \mathbb{R}^{4n} é a matriz $\psi(H)$, é uma representação de $Herm(n, \mathbb{H})$ que satisfaz a propriedade (2.11) e, portanto, $Herm(n, \mathbb{H})$ é uma álgebra de Jordan representável.

Finalmente, se munirmos $Herm(n, \mathbb{H})$ do produto interno (2.12), definido no Exemplo 2.3.9, obtemos uma álgebra de Jordan euclidiana simples.

Exemplo 2.3.11. A álgebra de Jordan euclidiana \mathcal{L}^n , definida nos Exemplos 2.2.2 e 2.3.2 também é representável, isto é, é possível construir um homomorfismo ϕ entre \mathcal{L}^n e o conjunto dos endomorfismos de um espaço vetorial E , satisfazendo a propriedade (2.11). Esta representação de \mathcal{L}^n encontra-se estudada, por exemplo, em [41, 58], e é feita por intermédio da álgebra de Clifford.

A álgebra de Clifford, denotada por \mathcal{C}_n , é uma álgebra de dimensão 2^n gerada pelo conjunto de elementos $\{e, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ satisfazendo as propriedades seguintes:

- (i) $e^2 = e$;
- (ii) $eb_i = b_ie = b_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$;
- (iii) $b_i^2 = e, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- (iv) $b_ib_j = -b_jb_i, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$.

Uma base de \mathcal{C}_n é constituída pelos 2^n produtos b_I definidos por

$$b_I = e \cdot b_{i_1} \cdots b_{i_r}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n, \quad I = \bigcup_{j=1}^r \{i_j\}, \quad I \subset \{1, \dots, n\}.$$

Um elemento da base b_I diz-se *simples*, se $|I| \leq 1$, *par*, se $b_I^2 = e$ e *ímpar*, se $b_I^2 = -e$. Dados dois elementos $x, y \in \mathcal{C}_n$, com $x = \sum_I x_I b_I$ e $y = \sum_I y_I b_I$, $x, y \in \mathbb{R}$, o produto xy é dado por

$$xy = \left(\sum_I x_I b_I \right) \left(\sum_I x_I b_I \right) = \sum_I \left(\sum_J \text{sgn}(I, J) x_J y_{I \Delta J} \right) b_I,$$

onde $I \Delta J$ denota a diferença simétrica entre os conjuntos I e J e $\text{sgn}(I, J) = 1$, se $b_I b_J = b_{I \Delta J}$ e $\text{sgn}(I, J) = -1$, se $b_I b_J = -b_{I \Delta J}$. Um elemento $x = \sum_I x_I b_I \in \mathcal{C}_n$ diz-se

- *simétrico*, se $\forall I, x_I \neq 0$, então b_I *par*,
- *simples*, se $\forall I, x_I \neq 0$, então b_I *simples*.

Observe-se que todo o elemento *simples* é *simétrico*. Um elemento de \mathcal{C}_n diz-se *adjunto* de $x \in \mathcal{C}_n$, e denota-se por x' , se se obtiver de x trocando o sinal a todos os coeficientes dos elementos da base *ímpares*. Um elemento x diz-se *autoadjunto* se e só se $x = x'$. Note-se que os elementos *simples* são *autoadjuntos*.

Agora consideramos o produto de Jordan induzido pelo produto em \mathcal{C}_n :

$$x \bullet y = \frac{xy + yx}{2}. \quad (2.13)$$

Este produto é fechado no conjunto dos elementos simétricos e no conjunto dos elementos simples de \mathcal{C}_n . Para além disso, o produto (2.13) coincide com o produto associado à álgebra \mathcal{L}^n definido no Exemplo 2.2.2. Assim, a álgebra \mathcal{L}^n é representável como uma álgebra de Jordan definida no conjunto dos elementos simples de \mathcal{C}_n , através do monomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathcal{L}^n &\rightarrow S(\mathcal{C}_{n-1}) \\ (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &\mapsto (x_0 e, x_1 b_1, \dots, x_{n-1} b_{n-1}), \end{aligned}$$

onde $S(\mathcal{C}_{n-1})$ denota o subconjunto dos elementos simples de \mathcal{C}_{n-1} .

Ao contrário das álgebras $Sym(n, \mathbb{R})$, \mathcal{L}^n , $Herm(n, \mathbb{C})$ e $Herm(n, \mathbb{H})$, que são representáveis, o exemplo que se segue apresenta uma álgebra de Jordan não representável. As álgebras não representáveis dizem-se *excepcionais*.

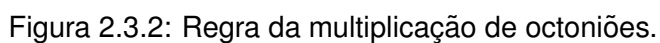
Exemplo 2.3.12. O espaço dos octonionês sobre \mathbb{R} , denotado por \mathbb{O} , é um espaço vetorial com dimensão 8 e base $\{1, e_1, e_2, \dots, e_7\}$, constituída pela unidade, 1, e por sete unidades imaginárias, e_1, e_2, \dots, e_7 . Este espaço torna-se uma álgebra através da tabela de multiplicação dos elementos da base que se segue (Tabela 2.3.2).

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabela 2.3.2: Tabela de multiplicação dos elementos da base de \mathbb{O} .

A regra multiplicativa subjacente é ilustrada na Figura 2.3.2.

A Figura 2.3.2 apresenta o denominado Plano de Fano que consiste de sete pontos e de sete linhas, cada uma das quais contendo exatamente três pontos. As linhas são os



- $e_i e_j = e_k,$
- $e_j e_i = -e_k,$
- $e_i e_k = -e_j,$
- $e_k e_i = e_j,$
- $e_j e_k = e_i$
- $e_k e_j = -e_i.$

$$||x|| = \sqrt{x \bar{x}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_7^2},$$

respetivamente. Comparativamente com a álgebra dos quatérniões, \mathbb{H} , a álgebra \mathbb{O} é igualmente não comutativa e é uma álgebra normada de divisão. Contudo, contrariamente a \mathbb{H} , a álgebra \mathbb{O} é não associativa, o que conseqüentemente não permite que os octoníões possam ser representados matricialmente.

A álgebra $Herm(3, \mathbb{O})$, das matrizes hermíticas 3×3 de octoníões, é uma álgebra de Jordan euclidiana simples com característica 3, munida do produto de Jordan, (2.2), e do produto interno (2.12) definido no Exemplo 2.3.9. Esta álgebra costuma denominar-se a álgebra excecional de Albert, por ser uma álgebra não representável e por ter sido desenvolvida pelo matemático Abraham Adrian Albert ao longo do seu estudo sobre álgebras não associativas (ver [1]).

O resultado seguinte estabelece uma classificação das álgebras de Jordan euclidianas simples.

Teorema 2.3.9. [26, Capítulo V] *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana simples. Então V é isomorfa a uma das seguintes álgebras:*

- (i) *a álgebra de Spin \mathcal{L}^n ,*
- (ii) *a álgebra $Sym(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais simétricas de ordem n ,*
- (iii) *a álgebra $Herm(n, \mathbb{C})$ das matrizes complexas hermíticas de ordem n , munida do produto de Jordan e do produto interno (2.12),*
- (iv) *a álgebra $Herm(n, \mathbb{H})$ das matrizes hermíticas de ordem n de quatérniões, munida do produto de Jordan e do produto interno (2.12),*
- (v) *a álgebra excecional de Albert, $Herm(3, \mathbb{O})$, das matrizes hermíticas de ordem 3 de octoníões, munida do produto de Jordan e do produto interno (2.12).*

2.4 Generalização do Teorema do Entrelaçamento a Álgebras de Jordan Euclidianas Simples

Vamos iniciar esta secção com alguns resultados e definições que nos vão permitir generalizar o Teorema do Entrelaçamento dos valores próprios de Cauchy a álgebras de Jordan euclidianas simples para uma qualquer ordenação dos valores próprios de um elemento da álgebra (Teorema 2.4.2). Antes, porém, é necessário introduzir alguns resultados prévios.

Proposição 2.4.1. [32] *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade e e $S = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ um sistema de Jordan de V . Sejam V_{ii} e V_{ij} os subespaços de Peirce de V associados a S , com $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ e $i < j$. Considere-se*

$$a = a_{i_1}c_{i_1} + a_{i_2}c_{i_2} + \dots + a_{i_k}c_{i_k},$$

com $\mathcal{I}_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$, $k \leq r$ e $i_l < i_m$, para $l < m$, e

$$u = \sum_{i=1}^r u_i c_i + \sum_{i < j} u_{ij},$$

com $u_i \in \mathbb{R}$ a decomposição de Peirce de $u \in V$ em relação a S e $u_{ij} \in V_{ij}$. Então,

$$L(a)(u) = \sum_{i \in \mathcal{I}_k} a_i u_i c_i + \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{I}_k \\ i < j}} \frac{a_i + a_j}{2} u_{ij} + \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}_k, j \notin \mathcal{I}_k \\ i < j}} \frac{a_i}{2} u_{ij} + \sum_{\substack{i \notin \mathcal{I}_k, j \in \mathcal{I}_k \\ i < j}} \frac{a_j}{2} u_{ij}.$$

Proposição 2.4.2. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade e e $S = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ um sistema de Jordan de V . Sejam V_{ii} e V_{ij} os subespaços de Peirce de V associados a S , com $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ e $i < j$. Considere-se*

$$\mathcal{I}_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, r\},$$

com $k \leq r$ e $i_l < i_m$, para $l < m$, e

$$u = \sum_{i=1}^r u_i c_i + \sum_{i < j} u_{ij},$$

com $u_i \in \mathbb{R}$ a decomposição de Peirce de u em V em relação a S e $u_{ij} \in V_{ij}$.

Então, $u \in V(d, 1)$, com $d = c_{i_1} + c_{i_2} + \dots + c_{i_k}$, se e só se

$$u = \sum_{i \in \mathcal{I}_k} u_i c_i + \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{I}_k \\ i < j}} u_{ij}.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.4.1, considerando $a_{i_l} = 1$, para $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ vem

$$\begin{aligned}
 L(d)(u) &= d \bullet u \\
 &= \sum_{i \in \mathcal{I}_k} c_i \bullet \left(\sum_{i=1}^r u_i c_i + \sum_{i < j} u_{ij} \right) \\
 &= \sum_{i \in \mathcal{I}_k} u_i c_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_k} c_i \bullet \sum_{i < j} u_{ij} \\
 &= \sum_{i \in \mathcal{I}_k} u_i c_i + \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{I}_k \\ i < j}} u_{ij} + \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}_k \\ j \notin \mathcal{I}_k}} \frac{u_{ij}}{2} + \sum_{\substack{i \notin \mathcal{I}_k \\ j \in \mathcal{I}_k}} \frac{u_{ij}}{2}.
 \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$u = \sum_{i \in \mathcal{I}_k} u_i c_i + \sum_{i \notin \mathcal{I}_k} u_i c_i + \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{I}_k \\ i < j}} u_{ij} + \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}_k \\ j \notin \mathcal{I}_k}} u_{ij} + \sum_{\substack{i \notin \mathcal{I}_k \\ j \in \mathcal{I}_k}} u_{ij}.$$

Logo, como os subespaços V_{ij} são ortogonais entre si, resulta da igualdade $L(d)(u) = u$, $\forall u \in V$, que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \notin \mathcal{I}_k} u_i c_i &= 0 \\
 \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}_k \\ j \notin \mathcal{I}_k}} u_{ij} &= 0 \\
 \sum_{\substack{i \notin \mathcal{I}_k \\ j \in \mathcal{I}_k}} u_{ij} &= 0.
 \end{aligned}$$

Então,

$$V(d, 1) = \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}_k} u_i c_i + \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{I}_k \\ i < j}} u_{ij}, \quad u_i \in \mathbb{R} \wedge u_{ij} \in V_{ij} \right\}.$$

□

Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana simples com elemento unidade e , $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ um sistema de Jordan de V e

$$u = \sum_{i=1}^r u_i c_i + \sum_{i < j} u_{ij},$$

com $u_{ij} \in V_{ij}$ da decomposição de Peirce associada ao sistema de Jordan $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$. Considere-se agora $\mathcal{I}_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, um subconjunto de $\{1, 2, \dots, r\}$, com $i_l < i_m$, para $l < m$. Chama-se *parte principal* de u associada ao conjunto \mathcal{I}_k o seguinte elemento de V :

$$u' = \sum_{i \in \mathcal{I}_k} u_i c_i + \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{I}_k \\ i < j}} u_{ij}. \quad (2.14)$$

Exemplo 2.4.1. Continuando o Exemplo 2.3.7 e aplicando a propriedade de \mathcal{V}_n apresentada no Exemplo 2.2.3, temos que a parte principal da matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

associada ao conjunto de índices $\mathcal{I}_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ é a matriz:

$$\begin{aligned} X_P &= P(E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_k})(X) \\ &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \cdots & i_1 & \cdots & i_2 & \cdots & i_k & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i_1 \\ \vdots \\ i_2 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_{i_1 i_1} & \cdots & x_{i_1 i_2} & \cdots & x_{i_1 i_k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_{i_2 i_1} & \cdots & x_{i_2 i_2} & \cdots & x_{i_2 i_k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_{i_k i_1} & \cdots & x_{i_k i_2} & \cdots & x_{i_k i_k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_k} x_{ii} E_{ii} + \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in \mathcal{I}_k}} x_{ij} (E_{ij} + E_{ji}) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_k} X_{ii} + \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in \mathcal{I}_k}} X_{ij}. \end{aligned}$$

Note-se que, quando V é simples, o conjunto $\mathcal{J}(V)$ é compacto em V (ver [26, Exercício 5, p. 78]).

Seja c um idempotente de $\mathcal{J}(V)$. Então, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno de V , existe um escalar α tal que $\langle u, v \rangle = \alpha \operatorname{tr}(u \bullet v)$, pela Proposição 2.3.3. Em particular, tem-se $\langle c, c \rangle = \alpha \operatorname{tr}(c \bullet c) = \alpha \operatorname{tr}(c)$, ou seja, $\|c\|^2 = \alpha \operatorname{tr}(c)$. Logo, como c é primitivo, $\alpha = \|c\|^2$.

Dada uma sequência de números $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, define-se a sequência $(\lambda_1^\downarrow, \lambda_2^\downarrow, \dots, \lambda_r^\downarrow)$, como sendo uma reordenação da anterior em que $\lambda_1^\downarrow \geq \lambda_2^\downarrow \geq \dots \geq \lambda_r^\downarrow$.

Com o objetivo de apresentar uma generalização do Teorema do Entrelaçamento de valores próprios às álgebras de Jordan euclidianas simples, segue-se o resultado seguinte que é uma generalização do Teorema min-max de Hirzebruch, que pode ser consultado em [35], a uma qualquer ordenação dos valores próprios de um elemento de uma álgebra de Jordan euclidiana simples.

Teorema 2.4.1. (Generalização do Teorema min-max de Hirzebruch) *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana simples com elemento unidade e , $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ um sistema de Jordan de V e $u \in V$ tal que $u = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$. Então, definindo $\lambda(u) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ e $\lambda^\downarrow(u) = (\lambda_1^\downarrow, \lambda_2^\downarrow, \dots, \lambda_r^\downarrow)$, temos que*

$$\begin{aligned} \lambda_1^\downarrow(u) &= \max_{c \in \mathcal{J}(V)} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle e, c \rangle}; \\ \lambda_r^\downarrow(u) &= \min_{c \in \mathcal{J}(V)} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle e, c \rangle}; \\ \lambda_i^\downarrow(u) &= \min_{\{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\} \subset \mathcal{J}(V)} \max_{\substack{c \in \mathcal{J}(V) \\ c \perp \{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\}}} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle e, c \rangle}, \text{ para } i \in \{2, \dots, r-1\}, \end{aligned}$$

onde \perp denota a relação de ortogonalidade entre dois elementos de V .

Demonstração. Seja $u = \sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow f_i$ uma decomposição espectral de u com $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ um sistema de Jordan tal que $f_i = c_{\phi(i)}$, com ϕ uma permutação dos números naturais de 1 até r .

Em primeiro lugar vejamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} &= \frac{\left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow f_i, c \right\rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow \langle f_i, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&\leq \frac{\lambda_1^\downarrow \left\langle \sum_{i=1}^r f_i, c \right\rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \frac{\lambda_1^\downarrow \langle \mathbf{e}, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \lambda_1^\downarrow.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Note-se que em (2.15) tomamos em conta que Ω , o cone dos quadrados de V , é auto-dual e $f, c \in \Omega$.

Agora tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\langle u, f_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}, f_1 \rangle} &= \frac{\left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow f_i, f_1 \right\rangle}{\langle \mathbf{e}, f_1 \rangle} \\
&= \frac{\left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow f_i \bullet f_1, \mathbf{e} \right\rangle}{\langle (f_1 + f_2 + \dots + f_r) \bullet f_1, \mathbf{e} \rangle} \\
&= \frac{\lambda_1^\downarrow \langle f_1, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \\
&= \lambda_1^\downarrow.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1^\downarrow(u) = \max_{c \in \mathcal{J}(V)} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle}.$$

Relativamente à segunda igualdade vejamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} &= \frac{\left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow f_i, c \right\rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow \langle f_i, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&\geq \frac{\lambda_r^\downarrow \left\langle \sum_{i=1}^r f_i, c \right\rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \frac{\lambda_r^\downarrow \langle \mathbf{e}, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \lambda_r^\downarrow.
\end{aligned}$$

Agora tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\langle u, f_r \rangle}{\langle \mathbf{e}, f_r \rangle} &= \frac{\left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow f_i, f_r \right\rangle}{\langle \mathbf{e}, f_r \rangle} \\
&= \frac{\left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow f_i \bullet f_r, \mathbf{e} \right\rangle}{\langle (f_1 + f_2 + \dots + f_r) \bullet f_r, \mathbf{e} \rangle} \\
&= \frac{\lambda_r^\downarrow \langle f_r, f_r \rangle}{\langle f_r, f_r \rangle} \\
&= \lambda_r^\downarrow.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_r^\downarrow(u) = \min_{c \in \mathcal{J}(V)} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle}.$$

Seja $i \in \{2, \dots, r-1\}$ e $\{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\}$ um sistema de idempotentes ortogonais primitivos. Em primeiro lugar tem-se que

$$\max_{\substack{c \in \mathcal{J}(V) \\ c \perp \{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\}}} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \geq \max_{\substack{c \in \mathcal{J}(V) \\ c \perp \{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\} \wedge c \perp \{f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_r\}}} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle}.$$

Agora prova-se que

(i)

$$\max_{\substack{c \in \mathcal{J}(V) \\ c \perp \{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\} \wedge c \perp \{f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_r\}}} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \geq \lambda_i^\downarrow$$

e, portanto,

$$\max_{\substack{c \in \mathcal{J}(V) \\ c \perp \{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\}}} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \geq \lambda_i^\downarrow.$$

(ii) Por último prova-se que

$$\forall c \in \mathcal{J}(V) : c \perp \{f_1, \dots, f_{i-1}\}, \quad \frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \leq \lambda_i^\downarrow.$$

Notando que $f_i \perp \{f_1, \dots, f_{i-1}\}$, por (i) e (ii) prova-se que

$$\lambda_i^\downarrow(u) = \min_{\{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\}} \max_{\substack{c \in \mathcal{J}(V) \\ c \perp \{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\}}} \frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle}, \text{ para } i \in \{2, \dots, r-1\}.$$

(i) Seja $c \in \mathcal{J}(V)$ tal que $c \perp \{d_1, d_2, \dots, d_{i-1}\} \cup \{f_{i+1}, \dots, f_r\}$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} &= \frac{\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow f_i, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \frac{\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^\downarrow f_i \bullet c, \mathbf{e} \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \frac{\langle \sum_{j=1}^i \lambda_j^\downarrow f_j \bullet c, \mathbf{e} \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^i \lambda_j^\downarrow \langle f_j \bullet c, \mathbf{e} \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^i \lambda_j^\downarrow \langle f_j, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&\geq \frac{\sum_{j=1}^i \lambda_i^\downarrow \langle f_j, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} \\
&= \frac{\lambda_i^\downarrow \langle \sum_{j=1}^i f_j, c \rangle}{\langle \sum_{j=1}^r f_j, c \rangle} \\
&= \frac{\lambda_i^\downarrow \langle \sum_{j=1}^i f_j, c \rangle}{\langle \sum_{j=1}^i f_j, c \rangle} \\
&= \lambda_i^\downarrow.
\end{aligned}$$

(ii) $c \perp \{f_1, \dots, f_{i-1}\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\langle u, c \rangle}{\langle \mathbf{e}, c \rangle} &= \frac{\langle \sum_{j=1}^r \lambda_j^\downarrow f_j, c \rangle}{\langle \sum_{j=1}^r f_j, c \rangle} \\
&\leq \frac{\sum_{j=1}^r \langle \lambda_i^\downarrow f_j, c \rangle}{\sum_{j=1}^r \langle f_j, c \rangle} \\
&= \lambda_i^\downarrow.
\end{aligned}$$

□

Seja $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ um sistema de Jordan de uma álgebra de Jordan euclidiana simples V e \mathcal{I}_k tal como definido anteriormente. Considere-se

$$u = \sum_{i=1}^r u_i c_i + \sum_{i < j} u_{ij},$$

com $u_{ij} \in V_{ij}$ da decomposição de Peirce associada ao sistema de Jordan $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$. Seja u' a parte principal de u associada a \mathcal{I}_k tal como em (2.14). Por último, considere-se $d = c_{i_1} + c_{i_2} + \dots + c_{i_k}$.

Tem-se que (ver [32]):

- (i) $V(d, 1)$ é uma subálgebra de V ;
- (ii) $V(d, 1) = \mathbb{R}c_{i_1} + \mathbb{R}c_{i_2} + \dots + \mathbb{R}c_{i_k} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} V_{i_i i_j}$;
- (iii) $V(d, 1) = P(d)(V)$;
- (iv) Se V for simples, $V(d, 1)$ é uma subálgebra simples de V .

Tendo em consideração (i)–(iv), através do Teorema 2.4.1 deduz-se o resultado seguinte, que é uma generalização do Teorema do Entrelaçamento de valores próprios estendido às álgebras de Jordan euclidianas simples (ver [32]), já que em vez de considerar a parte principal de um elemento relativamente a um sistema de Jordan da álgebra, estendemos o resultado à parte principal de um elemento relativamente a um qualquer subconjunto do sistema de Jordan.

Teorema 2.4.2. (Generalização do Teorema do Entrelaçamento dos Valores Próprios estendido a álgebras de Jordan euclidianas simples) *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana simples com elemento unidade e e $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ um sistema de Jordan de V . Seja $\mathcal{I}_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, um subconjunto de $\{1, 2, \dots, r\}$, com $i_l < i_m$, para $l < m$. Para cada elemento $u \in V$ seja u' a parte principal de u relativamente a \mathcal{I}_k . Então*

$$\lambda_i^\downarrow(u) \geq \lambda_i^\downarrow(u') \geq \lambda_{r-k+i}^\downarrow(u), \quad (2.16)$$

para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, com $\lambda_i^\downarrow(u')$ o valor próprio de u' em $V(d, 1)$.

Como consequência do Teorema 2.4.2 temos o corolário seguinte.

Corolário 2.4.1. [32] *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana simples com elemento unidade e e $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ um sistema de Jordan de V . Então, para cada $u \in V$, u é definido positivo se e só se*

$$\det P(c_{i_1} + c_{i_2} + \dots + c_{i_k})(u) > 0,$$

para todo o $\mathcal{I}_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, com $i_l < i_m$, para $l < m$ e $k \leq r$.

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Denota-se por $A \circ B$ o *produto de Hadamard* entre as matrizes A e B , definido por $A \circ B = [a_{ij}b_{ij}]$. Note-se que esta operação é associativa e comutativa com unidade J_n , em que J_n representa a matriz de ordem n cujas entradas são todas iguais a 1. Também denotamos por $C \otimes D$ o *produto de Kronecker* entre as matrizes $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $D = [d_{ij}] \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, definido por

$$C \otimes D = \begin{pmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1n}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}D & \cdots & c_{mn}D \end{pmatrix}.$$

Uma *submatriz principal* de uma matriz $M \in \mathcal{M}_{m,n}$ é toda a submatriz que se obtém de M através da eliminação do mesmo número de linhas e de colunas de M .

Como $A \circ B$ é uma submatriz principal de $A \otimes B$ (ver [39, Lemma 5.1.1]) e como os valores próprios de $A \otimes B$ são simplesmente os produtos dos valores próprios de A com os valores próprios de B , temos o corolário seguinte, que surge como consequência imediata do Teorema 2.4.2, (ver [39, p. 312]).

Note-se que uma matriz $M \in \text{Herm}(n, \mathbb{C})$ ($\text{Sym}(n, \mathbb{R})$) diz-se *semi-definida positiva* se $z^\top M z \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$ (\mathbb{R}^n).

Corolário 2.4.2. *Se $A, B \in \text{Herm}(n, \mathbb{C})$ ($\text{Sym}(n, \mathbb{R})$) forem semi-definidas positivas, então:*

- (i) $\lambda_{\min}(A \circ B) \geq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B)$;
- (ii) $\lambda_{\max}(A \circ B) \leq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$,

onde $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ denotam, respetivamente, o menor e o maior valor próprio da matriz em consideração.

Capítulo 3

Grafos Fortemente Regulares

I am not content with algebra, in that it yields neither the shortest proofs nor the most beautiful constructions of geometry. Consequently, in view of this, I consider that we need yet another kind of analysis, geometric or linear, which deals directly with position, as algebra deals with magnitude.

Carta de Leibniz a Huygens, 1679, [6].

A Teoria dos Grafos é um exemplo extremamente pertinente de um ramo da Matemática que, sendo relativamente recente, desenvolvido já em pleno século XX, assume uma importância generalizada no desenvolvimento de muitas ciências, e em particular noutras áreas da própria Matemática.

O primeiro artigo conhecido em teoria dos grafos data de 1736 e é da autoria de Leonhard Euler. Em *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*¹, [25], Euler apresenta uma solução do problema das pontes de Königsberg e nela refere que, para o problema em causa aparentemente de cariz geométrico, só era relevante aquilo que podia ser determinado a partir do estudo das propriedades da “posição”, sem envolver medidas de distâncias nem cálculos com quantidades. Estávamos perante um ramo da geometria novo e pouco conhecido, que tinha sido mencionado pela primeira vez por Leibniz em 1679, numa carta escrita a Huygens e que se encontra citada no início deste capítulo.

Ainda assim, o termo “grafo” só viria a ser utilizado pela primeira vez por Sylvester em 1876, associado aos chamados diagramas de Kekulé, de representação de compostos químicos

¹Em português: *Solução de um problema relacionado com a geometria de posição*.

(ver Figura 3.0.1). O artigo publicado na *Nature* com o título *Chemistry and Algebra*, [6], traduzia a ideia do autor em estabelecer uma relação entre a Química e a Álgebra, relação essa que viria a ser consumada através do conceito de grafo. Com efeito, uma grande parte da terminologia usada na teoria de grafos provém precisamente de uma evolução do conceito sob a influência paralela das duas ciências: a Matemática e a Química. A definição de grafo só viria a surgir formalmente no século XX, período no qual a teoria começou a ser desenvolvida de uma forma determinante.

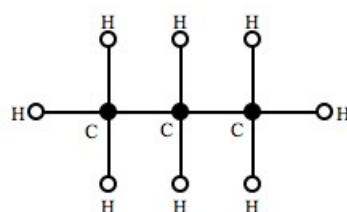


Figura 3.0.1: Diagrama de Kekulé, relativamente à molécula C_3H_8 .

Informalmente, um *grafo* pode ser visto, como uma estrutura constituída por pontos, ditos *vértices*, e por linhas que ligam pares desses pontos, ditas *arestas*. Estas estruturas têm uma representação gráfica intuitiva e a simplicidade do conceito permite modelar situações concretas, tais como as redes de transportes ou de comunicações, as ligações químicas entre os átomos (ver Figura 3.0.1), bem como outras situações sem um suporte físico evidente. De facto, qualquer conjunto de elementos tal que exista alguma relação binária entre eles, traduz uma situação susceptível de ser representada por um grafo. Por exemplo, a simples relação de paternidade, permite representar uma família por um grafo, a que vulgarmente chamamos de árvore genealógica.

Esta forma de representação (através de um grafo) tem a vantagem de clarificar os problemas evidenciando certas propriedades que, muitas vezes, não são fáceis de detetar de outro modo. As definições essenciais para a tese no âmbito da Teoria dos Grafos serão introduzidas na Secção 3.1.

Existem várias famílias de grafos diferentes, isto é, conjuntos de grafos que partilham certas características comuns. Durante este capítulo, assim como ao longo do nosso trabalho, vamo-nos debruçar sobre uma família particular: a família dos grafos *fortemente regulares*. Esta família foi introduzida em 1963 no artigo *Strongly regular graphs, partial*

geometries and partially balanced designs de R. C. Bose, [10], e será exposta ao longo da Secção 3.2.

3.1 Generalidades sobre Grafos

Nesta secção vamos introduzir alguma da notação básica da teoria dos grafos, tal como apresentado em [7, 21]. Apresentaremos também algumas famílias particulares de grafos.

Um *grafo* G é um triplete ordenado $(V(G), E(G), \psi_G)$ consistindo de um conjunto não vazio $V(G)$, cujos elementos são chamados de *vértices*, um conjunto $E(G)$ disjunto de $V(G)$, cujos elementos designamos por *arestas*, e uma função ψ_G , chamada de *função de incidência*, que associa a cada aresta de G um par não ordenado de vértices de G , os quais não são necessariamente distintos.

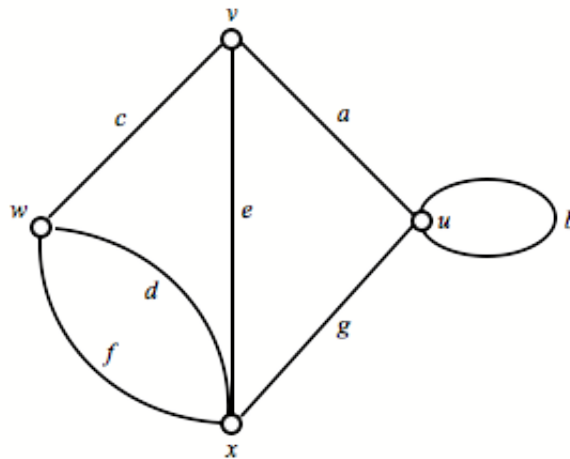


Figura 3.1.1: Grafo G com $V(G) = \{u, v, w, x\}$ e $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

O número de vértices de um grafo G , que corresponde à cardinalidade do conjunto $V(G)$, diz-se a *ordem* de G e denota-se por $|V(G)|$.

Se tivermos uma aresta e e vértices u e v tais que $\psi(e) = uv$, dizemos que os vértices u e v são *incidentes* com e e vice versa. A aresta e diz-se uma *ligação* entre u e v . Por outro lado, os vértices u e v dizem-se *adjacentes*, ou *vizinhos*, porque incidem numa aresta comum. Uma aresta e que incida duas vezes no mesmo vértice, u , ou seja, tal que

$\psi_G(e) = uv$ diz-se um *lacete*. Também é comum definir-se a *vizinhança* de um vértice $v \in V(G)$, como o conjunto dos vértices adjacentes a v em G , isto é,

$$\{w : w \in V(G) \wedge vw \in E(G)\}.$$

Dado um grafo G , definimos o *complementar* de G , que se denota por \overline{G} , como o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de G e tal que $v, w \in V(\overline{G})$ são adjacentes em \overline{G} se e só se não forem adjacentes em G . A figura 3.1.2 ilustra o conceito de complementaridade de grafos.

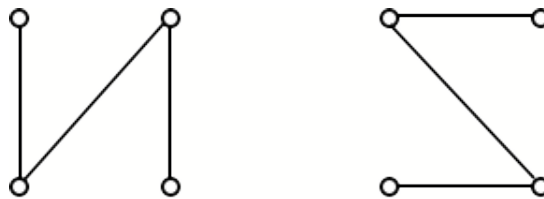


Figura 3.1.2: Um grafo e o seu complementar.

Um grafo G diz-se

- *planar*, se puder ser representado por um diagrama cujas arestas apenas se intersectam nos vértices;
- *finito*, se ambos os conjuntos de vértices e de arestas forem finitos;
- *simples*, se não contém lacetes e nenhum par de vértices tem duas ou mais ligações.

Dois grafos G_1 e G_2 são iguais, e escrevemos $G_1 = G_2$, se e só se os seus conjuntos de vértices e de arestas forem iguais, respetivamente, e partilharem a mesma função de incidência. Se dois grafos forem iguais é óbvio que podem ser representados pelo mesmo diagrama. Contudo, dois grafos, G_1 e G_2 , podem ser representados pelo mesmo diagrama e não serem iguais. Neste caso os grafos dizem-se *isomorfos*, e escrevemos $G_1 \cong G_2$, se existirem bijeções $\phi_1 : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ e $\phi_2 : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$, tais que $\psi_{G_1}(e) = uv$ se e só se $\psi_{G_2}(\phi_2(e)) = \phi_1(u)\phi_1(v)$. Um tal par de bijeções (ϕ_1, ϕ_2) é chamado um *isomorfismo* entre G_1 e G_2 .

Um grafo simples no qual todos os pares de vértices são adjacentes é chamado de *grafo*

completo. A menos de isomorfismo, existe apenas um grafo completo de n vértices, o qual é denotado por K_n . Uma representação de K_5 é apresentada na figura 3.1.3.

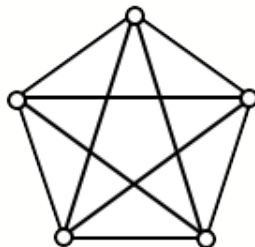


Figura 3.1.3: Representação de K_5 .

Por outro lado, se um grafo não tiver qualquer aresta diz-se *nulo*.

Um *grafo bipartido* G é um grafo cujo conjunto de vértices $V(G)$ admite uma partição em subconjuntos A e B tais que cada aresta de G é incidente com um vértice de A e um vértice de B . Um *grafo bipartido completo* é um grafo bipartido e simples tal que cada vértice em A é adjacente com cada vértice em B ; um tal grafo denota-se por $K_{m,n}$, onde $|A| = m$ e $|B| = n$. Uma representação de $K_{3,3}$ é apresentada na figura 3.1.4.

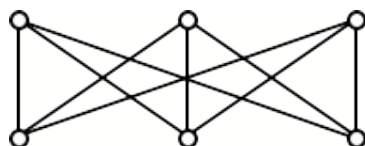


Figura 3.1.4: Representação de $K_{3,3}$.

O *grafo linha* de um grafo G , que se denota por $\mathcal{L}(G)$, é o grafo cujos vértices são as arestas de G e tal que dois vértices em $\mathcal{L}(G)$ são adjacentes se e só se as arestas correspondentes em G tiverem um vértice em comum. A Figura 3.1.5 apresenta um exemplo de um grafo conjuntamente com o respetivo grafo linha.

A qualquer grafo G podemos associar uma matriz $n \times n$, com $n = |V(G)|$, chamada a *matriz de adjacência* e denotada por $A(G) = [a_{ij}]$, onde cada a_{ij} é o número de arestas que ligam os vértices v_i e v_j . Ao conjunto formado pelos valores próprios de $A(G)$, incluindo as respetivas multiplicidades, chama-se o *espectro* de G .

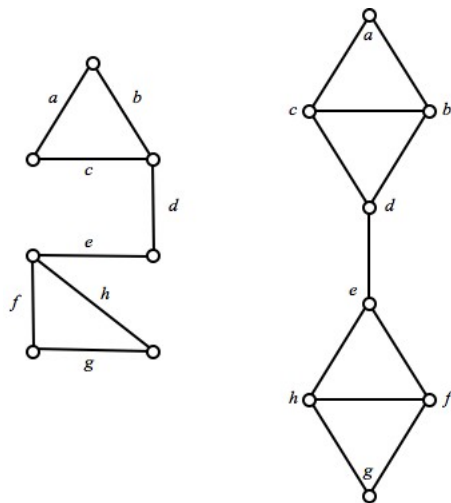


Figura 3.1.5: Um grafo e o respectivo grafo linha.

Exemplo 3.1.1. Considere-se o grafo G representado esquematicamente na figura 3.1.6.

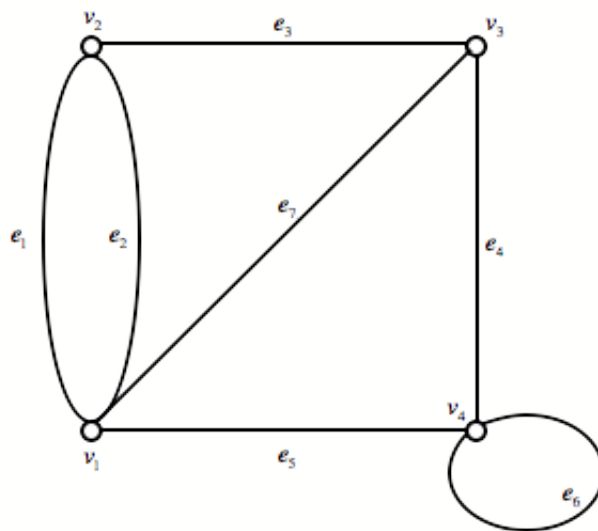


Figura 3.1.6: Grafo G .

A matriz de adjacência é dada por

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um grafo G' diz-se um *subgrafo* de um grafo G , e escrevemos $G' \subseteq G$, se $V(G') \subseteq V(G)$, $E(G') \subseteq E(G)$ e $\psi_{G'}$ é a restrição de ψ_G relativamente ao conjunto $E(G')$. Sempre que $G' \neq G$, G' diz-se um *subgrafo próprio* de G . Note-se também que, dado qualquer subconjunto não vazio V' de $V(G)$, podemos construir um subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V' , o qual designamos por *subgrafo induzido* de G e denotamos por $G[V']$.

Dado um grafo G , definimos o *grau* de um vértice v , e denotamos por $d_G(v)$, como o número de arestas de G incidentes com v e com a convenção de que cada lacete conta como duas arestas.

Um grafo G diz-se *regular* se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau. Mais geralmente, um grafo G diz-se regular de ordem k se $d_G(v) = k$, para todo o vértice $v \in V(G)$ e algum inteiro k . Os grafos completos de ordem n são exemplos de grafos regulares com ordem $n - 1$.

Dado um grafo G , designamos por *passeio (caminho)* em G entre os vértices v_0 e v_k a uma sequência não nula de vértices (distintos) e arestas (distintas) $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$, cujos termos são vértices e arestas alternados e tais que, para $1 \leq i \leq k$, os vértices v_{i-1} e v_i são incidentes com a aresta e_i .

Dois vértices v_1 e v_2 de um grafo G dizem-se *ligados* se existir um caminho entre v_1 e v_2 em G . Esta relação entre vértices é uma relação de equivalência no conjunto dos vértices $V(G)$, pelo que existe uma partição de $V(G)$ em subconjuntos não vazios $V_1, V_2, \dots, V_\omega$, contidos em $V(G)$, tais que, dois vértices são ligados se e só se pertencem ao mesmo subconjunto V_i , para um certo $i \in \{1, 2, \dots, \omega\}$. Os subgrafos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$ são chamados de *componentes conexas* de G e o número destas componentes denota-se por $\omega(G)$. Se G contiver apenas uma componente conexa, então diz-se que G é um grafo *conexo* e, caso contrário, G diz-se *desconexo*. A Figura 3.1.7 mostra um grafo desconexo que tem três componentes que são subgrafos conexos.

Define-se o *comprimento* de um caminho, C , entre os vértices v_1 e v_2 , como o número de passos necessários para, partindo de v_1 chegarmos a v_2 através do caminho em questão e denotamos por $\text{comp}(C)$. A *distância* entre dois vértices v_1 e v_2 de um grafo G é o comprimento do caminho mais curto entre v_1 e v_2 e denotamos por $\text{dist}(v_1, v_2)$. Dado um grafo G , define-se o *diâmetro* de G como sendo a maior distância entre dois vértices

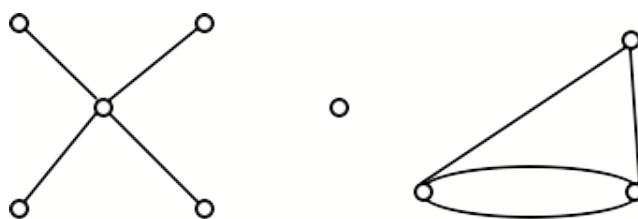


Figura 3.1.7: Um grafo desconexo com três componentes.

distintos de G e denotamos por $\text{diam}(G)$. Quando G não é conexo convencionamos-se que o seu diâmetro é infinito.

Um caminho fechado com comprimento positivo, isto é, tal que os vértices inicial e final são os únicos coincidentes diz-se um *ciclo*. Um ciclo de comprimento k costuma denotar-se por C_k e, dependendo da paridade de k , o ciclo diz-se par ou ímpar.

Define-se também a *cintura* de um grafo G , e denota-se por $g(G)$, como o comprimento de um ciclo de menor comprimento de G .

Um *grafo dirigido* é um grafo em que cada aresta tem uma direção associada, ou seja, cada aresta é um par ordenado de vértices. Como exemplo de um grafo dirigido podemos observar o grafo da Figura 3.1.8.

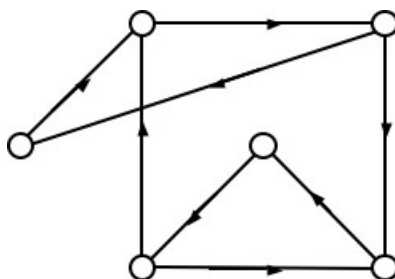


Figura 3.1.8: Um grafo dirigido.

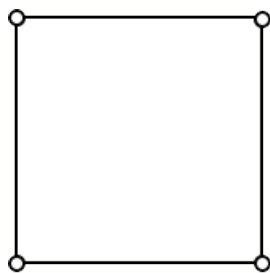
3.2 Grafos Fortemente Regulares

Nesta secção vamos apresentar o conceito de grafo fortemente regular que será fundamental para o nosso trabalho. Esta secção está dividida em quatro partes. Na Subsecção 3.2.1 caracterizamos a família dos grafos fortemente regulares, incluindo o relacionamento

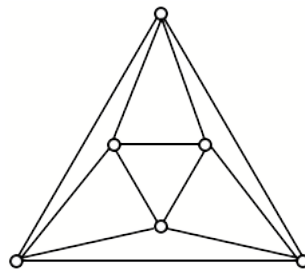
entre os parâmetros, os valores próprios e as respectivas multiplicidades. Na Subsecção 3.2.2 apresentamos algumas famílias interessantes de grafos fortemente regulares. Na Subsecção 3.2.3 estudamos os grafos fortemente regulares como casos particulares de esquemas associativos com duas classes e, no final da subsecção, provamos novos resultados sobre os parâmetros de Krein de um esquema associativo com um número qualquer de classes. Na Subsecção 3.2.4 damos a conhecer ao leitor a bateria de condições necessárias de existência que se conhecem sobre os parâmetros de um grafo fortemente regular.

3.2.1 Definição e Propriedades

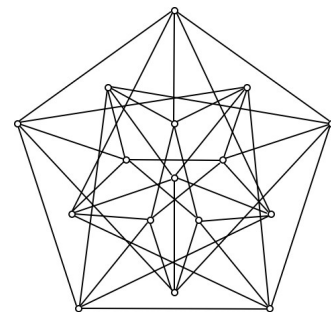
Um grafo G , simples, não completo, não nulo e não dirigido, diz-se *fortemente regular* se for regular e se, dado um qualquer par de vértices $v, w \in V(G)$, o número de vértices adjacentes simultaneamente a v e w depende, unicamente, do facto de v e w serem ou não adjacentes. Assim, se G tiver ordem n , se for regular com ordem k , se cada par de vértices adjacentes em G tiver a vértices vizinhos e cada par de vértices não adjacentes em G tiver c vértices vizinhos, dizemos que G é um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) . A figura 3.2.1 mostra três exemplos de grafos fortemente regulares.



(a) O ciclo de ordem 4 é fortemente regular com parâmetros $(4, 2, 0, 2)$.



(b) O grafo octaedral é fortemente regular com parâmetros $(6, 4, 2, 4)$.



(c) O grafo de Clebsch é fortemente regular com parâmetros $(16, 5, 0, 2)$.

Figura 3.2.1: Três exemplos de grafos fortemente regulares.

Note-se que um conjunto de parâmetros não define, em geral, um único grafo fortemente regular. Por exemplo, conhecem-se pelo menos 105 grafos fortemente regulares, não

isomorfos, com o conjunto de parâmetros $(36, 14, 4, 6)$. Na Figura 3.2.2 podemos observar o grafo linha do grafo completo bipartido $K_{4,4}$ e o grafo de Shrikhande, que são dois grafos fortemente regulares não isomorfos que partilham o conjunto de parâmetros $(16, 6, 2, 2)$.

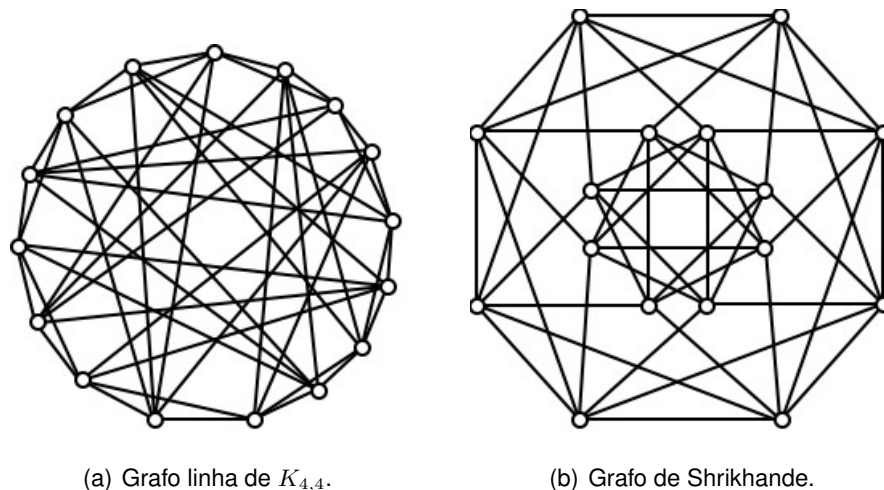


Figura 3.2.2: Dois grafos fortemente regulares não isomorfos com o conjunto de parâmetros $(16, 6, 2, 2)$.

Observação 3.2.1. *Note-se que a entrada $(A^r)_{ij}$ da matriz de adjacência A de um grafo fortemente regular corresponde ao número de passeios de comprimento r entre os vértices i e j (ver [29, Lemma 8.1.2]). Então a entrada $(A^2)_{ij}$ corresponde ao número do passeios de comprimento 2 entre os vértices i e j , mas como G é regular, este número depende apenas do facto de i e j serem iguais ou distintos e, neste caso, se são adjacentes ou não. Assim, é possível escrever A^2 como*

$$A^2 = kI_n + aA + c(J_n - A - I_n),$$

o que é equivalente a

$$A^2 + (c - a)A + (c - k)I_n = cJ_n. \quad (3.1)$$

Se G for um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) , então o seu complemen-

tar, \overline{G} também é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, \bar{k}, \bar{a}, \bar{c})$, com

$$\bar{k} = n - k - 1, \quad (3.2)$$

$$\bar{a} = n - 2 - 2k + c, \quad (3.3)$$

$$\bar{c} = n - 2k + a. \quad (3.4)$$

Neste ponto, note-se que enquanto (3.2) e (3.4) produzem sempre valores positivos, o mesmo não está garantido em (3.3).

Um grafo fortemente regular G diz-se *primitivo* se tanto G como o seu complementar \overline{G} forem conexos. O lema seguinte mostra que existe apenas uma classe de grafos fortemente regulares não primitivos.

Lema 3.2.1. [29, Lema 10.1.1] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) . Então as condições seguintes são equivalentes:*

- (i) G não é conexo;
- (ii) $c = 0$;
- (iii) $a = k - 1$;
- (iv) G é isomorfo a mK_{k+1} , para algum $m > 1$.

Observação 3.2.2. *Se G for um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) conexo, isto é, se $c \neq 0$, então $\text{diam}(G) = 2$.*

Os parâmetros (n, k, a, c) de um grafo fortemente regular não são independentes entre si, estando relacionados através da igualdade (3.5) da Proposição 3.2.1, que se apresenta em seguida. Este resultado aparece em toda a bibliografia sobre grafos fortemente regulares e a sua demonstração é feita por simples contagem do número de arestas entre os vizinhos e os não vizinhos de um vértice fixo de um grafo fortemente regular. Porém, vamos apresentar uma demonstração alternativa deste resultado utilizando somente ferramentas algébricas apresentadas no Capítulo 2.

Proposição 3.2.1. *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) e matriz de adjacência A . Então:*

$$k(k - a - 1) = (n - k - 1)c. \quad (3.5)$$

Demonstração. Como G é fortemente regular temos, pela Observação 3.2.1, que

$$A^2 = kI_n + aA + c(J_n - A - I_n). \quad (3.6)$$

Seja \mathcal{V}_n a álgebra de Jordan euclidiana definida no Exemplo 2.3.1. Seja \mathcal{V}'_n a subálgebra de \mathcal{V}_n gerada por I_n e pelas potências naturais de A . Na Secção 4.1 vamos demonstrar que \mathcal{V}'_n é uma álgebra de Jordan euclidiana com dimensão e característica 3. Admitindo a prova deste facto, podemos concluir que existe um único sistema de Jordan associado a A de \mathcal{V}'_n , $S = \{E_0, E_1, E_2\}$ cujos idempotentes satisfazem as propriedades:

- (i) $E_0 = \frac{1}{n}J_n$;
- (ii) $\sum_{i=0}^2 E_i = I_n$;
- (iii) $AE_i = \lambda_i E_i$;
- (iv) $A = \sum_{i=0}^2 \lambda_i E_i$;

onde os λ_i , $i \in \{0, 1, 2\}$ são os valores próprios da matriz A . Como as potências de A podem ser escritas à custa da decomposição espectral de A , temos pela propriedade (iv),

$$A^m = \sum_{i=0}^2 \lambda_i^m E_i,$$

para qualquer inteiro $m \geq 1$, então a igualdade (3.6) pode ser escrita como

$$\sum_{i=0}^2 \lambda_i^2 E_i = k \sum_{i=0}^2 E_i + a \sum_{i=0}^2 \lambda_i E_i + c \left(nE_0 - \sum_{i=0}^2 \lambda_i E_i - \sum_{i=0}^2 E_i \right). \quad (3.7)$$

Igualando os termos em E_0 em ambos os membros da igualdade (3.7) obtemos:

$$\lambda_0^2 E_0 = kE_0 + a\lambda_0 E_0 + c(nE_0 - \lambda_0 E_0 - E_0),$$

pelo que temos

$$\lambda_0^2 = k + a\lambda_0 + c(n - \lambda_0 - 1). \quad (3.8)$$

Finalmente, como pela propriedade (i) temos que $\lambda_0 = k$, substituindo em (3.8) e fazendo elementares manipulações algébricas obtemos a igualdade (3.5), pelo que a proposição fica demonstrada. \square

Um dos problemas no estudo dos grafos fortemente regulares é encontrar conjuntos de valores admissíveis para os parâmetros e, depois, tentar construir grafos que respeitem tais parâmetros. A equação (3.5) é um exemplo de uma *condição de admissibilidade* que os parâmetros de qualquer grafo fortemente regular têm que obedecer.

Seja A a matriz de adjacência de um grafo fortemente regular G com parâmetros (n, k, a, c) . Uma propriedade interessante àcerca dos grafos fortemente regulares é que os valores próprios de A , assim como as respectivas multiplicidades, podem ser escritos exclusivamente à custa dos parâmetros de G . De facto, os valores próprios de A são a própria regularidade k e ainda θ e τ dados por

$$\theta = \frac{a - c + \sqrt{(a - c)^2 + 4(k - c)}}{2} \quad (3.9)$$

$$\tau = \frac{a - c - \sqrt{(a - c)^2 + 4(k - c)}}{2}. \quad (3.10)$$

Quanto às multiplicidades, temos que a multiplicidade de k é 1 e as de θ e τ são m_θ e m_τ , respetivamente, dadas por

$$m_\theta = \frac{1}{2} \left(n - 1 - \frac{2k + (n - 1)(a - c)}{\sqrt{(a - c)^2 + 4(k - c)}} \right) \quad (3.11)$$

$$m_\tau = \frac{1}{2} \left(n - 1 + \frac{2k + (n - 1)(a - c)}{\sqrt{(a - c)^2 + 4(k - c)}} \right). \quad (3.12)$$

Note-se que as fórmulas (3.11) e (3.12) constituem, por si próprias, condições de admissibilidade para conjuntos de parâmetros de grafos fortemente regulares. Dado qualquer conjunto de parâmetros (n, k, a, c) , o cálculo de m_θ e m_τ tem que originar valores inteiros e, caso contrário, não pode existir um grafo fortemente regular com esses parâmetros. Por esta razão, as condições (3.11) e (3.12) são normalmente designadas por condições de *integralidade*.

O resultado que se segue mostra que apenas existe um tipo de grafos conexos regulares que é fortemente regular e é uma extensão do resultado em [29, Lema 10.2.1], já que este apenas contém a afirmação recíproca do resultado seguinte.

Teorema 3.2.1. *Seja G um grafo conexo e regular. Então G é fortemente regular se e só se G tem exatamente três valores próprios distintos.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo e regular com regularidade k e A a respectiva matriz de adjacência. Suponhamos que G é fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) . Um valor próprio de A é k com vetor próprio associado, $\mathbf{j} = (1, 1, \dots, 1)$, já que $A\mathbf{j} = k\mathbf{j}$. Seja λ um outro valor próprio de A com $\lambda \neq k$ e v um vetor próprio associado a λ . O vetor v é tal que $v^\top \mathbf{j} = 0$ (ver [29, Lemma 8.4.1]) e, portanto, $Jv = 0$. Então, aplicando v à igualdade (3.1) da Observação 3.2.1 concluímos que λ tem que ser raiz da equação quadrática

$$\lambda^2 + (c - a)\lambda + c - k = 0, \quad (3.13)$$

pelo que A tem, no máximo, três valores próprios. Como G é fortemente regular e conexo, a análise das raízes de (3.13) permite-nos concluir que G tem exatamente três valores próprios distintos

Reciprocamente, suponhamos que A tem exatamente três valores próprios distintos. Para além de k , sejam λ_1 e λ_2 os outros valores próprios de A , distintos de k . Então

$$B = A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 I_n \quad (3.14)$$

é uma matriz tal que $Bv = 0$, para cada vetor próprio v de A excetuando o vector \mathbf{j} .

Por outro lado, como

$$\frac{1}{(k - \lambda_1)(k - \lambda_2)} B\mathbf{j} = \mathbf{j},$$

onde $\frac{B}{(k - \lambda_1)(k - \lambda_2)}$ é o projetor ortogonal associado ao valor próprio k , e como G é conexo, temos que

$$\frac{1}{(k - \lambda_1)(k - \lambda_2)} B = \frac{1}{n} J_n. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) em (3.14), é possível escrever A^2 como combinação linear de I_n , J_n e A e, portanto, G é fortemente regular. \square

Existem várias famílias interessantes de grafos fortemente regulares, algumas das quais serão apresentadas na próxima subsecção.

3.2.2 Famílias Particulares de Grafos Fortemente Regulares

Ao longo desta subsecção vamos apresentar e caracterizar algumas famílias de grafos fortemente regulares que se revelaram interessantes no contexto do nosso trabalho.

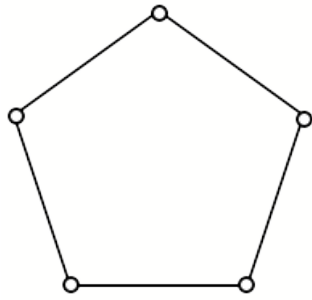
Sabe-se que, para qualquer número primo p e um inteiro positivo n , existe um corpo finito com p^n elementos denotado por $GF(p^n)$. Seja q uma potência de um número primo tal que

$$q \equiv 1 \pmod{4}. \quad (3.16)$$

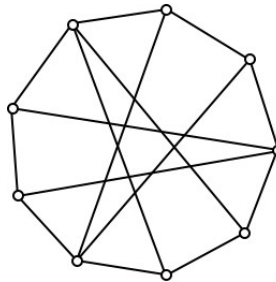
Então define-se o *grafo de Paley* de ordem q como o grafo cujos vértices são os elementos do corpo finito $GF(q)$ com a seguinte propriedade: dois vértices são adjacentes se e só se a sua diferença é um quadrado diferente de 0 em $GF(q)$. A condição (3.16) implica que -1 é um quadrado em $GF(q)$ e, portanto, o grafo é não dirigido. Um grafo de Paley de ordem q é fortemente regular com parâmetros

$$\left(q, \frac{q-1}{2}, \frac{q-5}{4}, \frac{q-1}{4} \right)$$

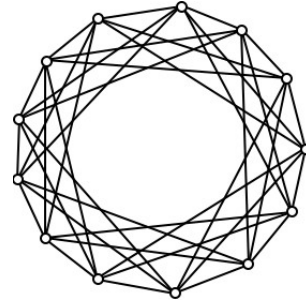
e os valores próprios θ e τ são respetivamente $(-1 + \sqrt{q})/2$ e $(-1 - \sqrt{q})/2$, com multiplicidades $m_\theta = m_\tau = (q-1)/2$. Na Figura 3.2.3 pode-se observar os três primeiros grafos de Paley.



(a) Grafo de Paley de ordem 5.



(b) Grafo de Paley de ordem 9.



(c) Grafo de Paley de ordem 13.

Figura 3.2.3: Os três primeiros grafos de Paley.

Os grafos tais que $m_\theta = m_\tau$, chamam-se *grafos de conferência*. Esta família de grafos surgiu do estudo de Belevitch, [5], sobre circuitos de conferências telefónicas. Um grafo

de conferência com n vértices é originado por uma matriz de conferência simétrica de dimensão $n + 1$. Uma *matriz de conferência*, C , de ordem $n + 1$ é uma matriz do espaço $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, cuja diagonal é nula e todas as outras entradas são preenchidas com $+1$ ou -1 . A matriz C satisfaz ainda a propriedade:

$$CC^T = nI_{n+1}.$$

Dadas as definições, é imediato concluir que todo o grafo de Paley é um grafo de conferência. O recíproco, no entanto, não é verdadeiro. De facto, temos que o grafo fortemente regular de parâmetros $(45, 20, 10, 11)$ constitui um exemplo de um grafo de conferência que não é de Paley. Os grafos de Paley podem ser interpretados como uma classe especial dos grafos de conferência em que a ordem é uma potência de um primo que satisfaz a condição (3.16). Segue-se um resultado que caracteriza o conjunto dos parâmetros dos grafos de conferência.

Lema 3.2.2. [29, Lema 10.3.2] *Seja G um grafo fortemente regular com o conjunto de parâmetros (n, k, a, c) e matriz de adjacência com valores próprios distintos k, θ e τ . Se $m_\theta = m_\tau$, então $k = (n - 1)/2$, $a = (n - 5)/4$ e $c = (n - 1)/4$.*

Uma outra propriedade interessante é que, se G for fortemente regular com um número primo de vértices, então G é um grafo de conferência.

O Lema que se segue divide os grafos fortemente regulares em duas classes.

Lema 3.2.3. [29, Lema 10.3.3] *Seja G um grafo fortemente regular com o conjunto de parâmetros (n, k, a, c) e matriz de adjacência com os valores próprios k, θ e τ . Então*

- (i) *G é um grafo de conferência, ou*
- (ii) *$(\theta - \tau)^2$ é um quadrado perfeito.*

Em seguida apresentamos algumas famílias simples de grafos fortemente regulares, obtidas através dos grafos linha dos grafos completos e dos grafos bipartidos completos. As proposições que se seguem foram demonstradas usando um processo de contagem de vértices e de arestas.

Proposição 3.2.2. *Seja $l > 3$ um natural. Então, $\mathcal{L}(K_l)$ é fortemente regular com o conjunto de parâmetros*

$$\left(\frac{l(l-1)}{2}, 2l-4, l-2, 4 \right).$$

Demonstração. Vamos provar que $\mathcal{L}(K_l)$ é fortemente regular com parâmetros:

$$(i) \quad n = \frac{l(l-1)}{2};$$

$$(ii) \quad k = 2l-4;$$

$$(iii) \quad a = l-2;$$

$$(iv) \quad c = 4.$$

(i) Como o número de vértices de $\mathcal{L}(K_l)$ é igual ao número de arestas de K_l , então

$$n = \binom{l}{2} = \frac{l(l-1)}{2}.$$

(ii) Considere-se um vértice $u \in \mathcal{L}(K_l)$ e v_1v_2 a aresta correspondente em $E(K_l)$, com $v_1v_2 \in V(K_l)$. O número de vizinhos de u é igual ao número de arestas de K_l incidentes em v_1 ou em v_2 e é igual a $2(l-1) - 2 = 2l-4$, visto K_l ser regular de ordem $l-1$. Logo $k = 2l-4$.

(iii) Considerem-se duas arestas em $E(K_l)$ com um vértice em comum (o que corresponde a dois vértices adjacentes em $\mathcal{L}(K_l)$), v_1v_2 e v_2v_3 , com $v_1, v_2, v_3 \in V(K_l)$. O número de arestas que incidem simultaneamente num vértice de v_1v_2 e num vértice de v_2v_3 pode ser obtido observando que em K_l existem ainda $l-3$ arestas que incidem em v_2 mais a aresta v_1v_3 , o que perfaz $l-2$ arestas. Logo $a = l-2$.

(iv) Considerem-se duas arestas em $E(K_l)$ não incidentes em vértices comuns (o que corresponde a dois vértices não adjacentes em $\mathcal{L}(K_l)$), v_1v_2 e v_3v_4 , com v_1, v_2, v_3 e v_4 em $V(K_l)$. Então existem apenas $\binom{4}{2} - 2$ arestas que incidem simultaneamente num vértice de v_1v_2 e num vértice de v_3v_4 . Logo $c = 4$.

□

O resultado seguinte mostra que os grafos bipartidos completos numa partição com duas partes de igual dimensão são fortemente regulares, assim como os respetivos grafos linha.

Proposição 3.2.3. *Seja $l > 1$ um natural. Então:*

- (i) $K_{l,l}$ é fortemente regular com parâmetros $(2l, l, 0, l)$.
- (ii) $\mathcal{L}(K_{l,l})$ é fortemente regular com parâmetros $(l^2, 2l - 2, l - 2, 2)$.

Demonstração. Seja $l > 1$ um natural.

- (i) Relativamente a $K_{l,l}$, provar que $n = 2l$ e $k = l$ é imediato.

Um par de vértices vizinhos em $K_{l,l}$, visto pertencerem a dois subconjuntos disjuntos de $V(K_{l,l})$, não têm qualquer vértice adjacente a ambos. Logo $a = 0$.

Um par de vértices não adjacentes em $K_{l,l}$, dado pertencerem ao mesmo subconjunto de $V(K_{l,l})$, têm l vértices vizinhos a ambos, pelo que $c = l$.

Então $K_{l,l}$ é um grafo fortemente regular com parâmetros $(2l, l, 0, l)$.

- (ii) Quanto ao grafo $\mathcal{L}(K_{l,l})$, como os vértices de $\mathcal{L}(K_{l,l})$ são as arestas de $K_{l,l}$ e $K_{l,l}$ tem l^2 arestas, então $n = l^2$.

Relativamente à regularidade, observando que cada aresta em $E(K_{l,l})$ incide num mesmo vértice para além de mais $2(l - 1)$ arestas, concluímos que $k = 2l - 2$.

Agora, tomando duas arestas em $E(K_{l,l})$ que incidam num mesmo vértice v , verificamos que existem ainda $l - 2$ arestas que incidem em v . Efetivamente, são as arestas que restam do subconjunto de $V(K_{l,l})$ ao qual não pertence v . Então $a = l - 2$.

Finalmente, sejam A, B a partição de $V(K_{l,l})$ e considerem-se duas arestas de $K_{l,l}$ que não incidem simultaneamente em nenhum vértice: $e_1 = xy$ e $e_2 = zt$, em que x, y, z, t são vértices distintos de $V(K_{l,l})$ e $x, z \in A$ e $y, t \in B$, sem perda de generalidade. Então podemos observar que existem em $E(K_{l,l})$ duas únicas arestas que incidem simultaneamente em vértices de e_1 e e_2 que são as arestas xt e yz . Logo $c = 2$.

Concluimos assim que $\mathcal{L}(K_{l,l})$ é fortemente regular com parâmetros $(l^2, 2l - 2, l - 2, 2)$.

□

Uma família de grafos interessante, que será objeto de análise no Capítulo 4, é a família dos grafos *cocktail party*. Um grafo cocktail party de ordem l é um grafo com $2l$ vértices e que consiste em l colunas de pares de vértices tais que todos os vértices são adjacentes exceto os pares em consideração. Estes grafos são denotados por $K_{l \times 2}$ em [12]. Os primeiros três grafos cocktail party conexos podem ser visualizados na Figura 3.2.4.

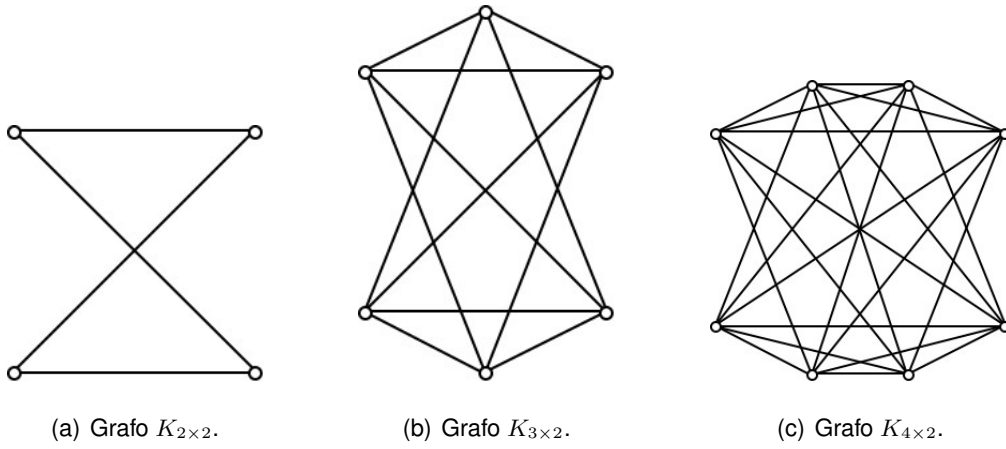


Figura 3.2.4: Os três primeiros grafos cocktail party.

Note-se que o grafo $K_{2 \times 2}$, Figura 3.4(a), é isomorfo ao ciclo de ordem 4 e que o grafo $K_{3 \times 2}$, Figura, 3.4(b), é isomorfo ao grafo octaedral já apresentado na Figura 3.1(b). Em seguida mostramos que os grafos cocktail party são fortemente regulares.

Proposição 3.2.4. *O grafo $K_{l \times 2}$ é fortemente regular com o conjunto de parâmetros $(2l, 2l - 2, 2l - 4, 2l - 2)$.*

Demonstração. Vamos provar que $K_{l \times 2}$ é fortemente regular com parâmetros

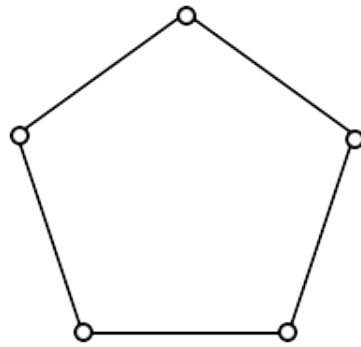
$$(n, k, a, c) = (2l, 2l - 2, 2l - 4, 2l - 2).$$

O facto de que $n = 2l$ e $k = 2l - 2$ decorre da definição de $K_{l \times 2}$.

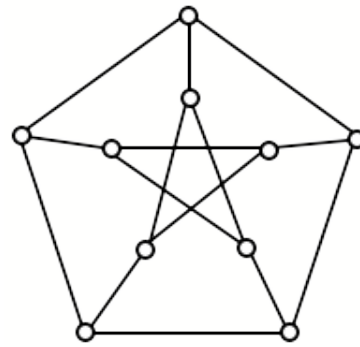
Dado um par de vértices não vizinhos em $K_{l \times 2}$, verificamos que ambos os vértices são adjacentes em simultâneo aos restantes $2l - 2$ vértices de $K_{l \times 2}$. Logo $c = k$.

Sejam $u, v \in K_{l \times 2}$ um par de vértices vizinhos e $u^*, v^* \in K_{l \times 2}$ os vértices não adjacentes a u e v , respectivamente. Assim, observamos que u e v são adjacentes a $2l - 4$ outros vértices de $K_{l \times 2}$, correspondentes à regularidade menos os dois vértices u^* e v^* . Logo, $a = 2l - 4$. \square

A última família de grafos fortemente regulares que vamos apresentar é a família dos *grafos de Moore*. Estes são os grafos com diâmetro d e cintura $2d + 1$. Esta família notável de grafos, que surgiu originalmente em 1960 no artigo de Hoffman e Singleton [36], é na verdade constituída por grafos fortemente regulares com parâmetros $(k^2 + 1, k, 0, 1)$. No mesmo artigo, Hoffman e Singleton demonstraram que no máximo existem 4 grafos de Moore, com regularidades 2, 3, 7 e 57. Na Figura 3.2.5 podemos observar os dois primeiros grafos de Moore, o pentágono e o grafo de Petersen.



(a) O pentágono é o grafo de Moore com regularidade 2, fortemente regular com parâmetros $(5, 2, 0, 1)$.



(b) O grafo de Petersen é o grafo de Moore com regularidade 3, fortemente regular com parâmetros $(10, 3, 0, 1)$.

Figura 3.2.5: Dois dos três grafos de Moore conhecidos

Quanto ao grafo de regularidade 7, a sua existência foi demonstrada por Hoffman e Singleton em [36]. Até à presente data desconhece-se se o quarto grafo de Moore com parâmetros $(3250, 57, 0, 1)$ existe.

Não obstante, existem diversos resultados sobre a hipótese da existência do grafo de Moore de regularidade 57. Sugere-se a leitura de [17, 29] onde são demonstradas algumas propriedades que o quarto grafo de Moore satisfaz, se existir.

3.2.3 Esquemas Associativos e Grafos Fortemente Regulares

Nesta secção mostramos que os grafos fortemente regulares podem ser interpretados como casos particulares de esquemas associativos e definimos e caracterizamos estas estruturas combinatórias (ver [3]).

Um *esquema associativo* com d classes é um conjunto finito X , munido de $d + 1$ relações R_i , tais que:

- (i) $\{R_0, R_1, \dots, R_d\}$ é uma partição de $X \times X$;
- (ii) $R_0 = \{(x, x) : x \in X\}$;
- (iii) Para cada $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ existe um $j \in \{0, 1, \dots, d\}$, tal que $(x, y) \in R_i$ implica $(y, x) \in R_j$;
- (iv) para cada $i, j, l \in \{0, 1, \dots, d\}$ existe um inteiro p_{ij}^l tal que, para todos $(x, y) \in R_l$,

$$|\{z \in X : (x, z) \in R_i \wedge (z, y) \in R_j\}| = p_{ij}^l;$$

- (v) $p_{ij}^l = p_{ji}^l, \forall i, j, l \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Os números p_{ij}^l são chamados os *números de interseção* do esquema associativo. No caso em que $(x, y) \in R_i$, os elementos x e y de X dizem-se *associados* de ordem i .

A definição apresentada deve-se a Delsarte, [23], e é uma generalização da definição original de Bose e Shimamoto, [8], na qual cada relação R_i é simétrica. Por este motivo, um esquema associativo definido como em [8] é normalmente designado de *simétrico*. De agora em diante, apenas serão considerados esquemas associativos simétricos.

Por conveniência de notação consideramos $n = |X|$ e $k_i = p_{ii}^0$. Note-se que para cada $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $G_i = (X, R_i)$ é um grafo simples com regularidade k_i .

Em seguida apresentamos um conjunto de propriedades que são satisfeitas pelos números de interseção de um esquema associativo.

Teorema 3.2.2. [13] *Os números de interseção de um esquema associativo com d classes satisfazem as propriedades seguintes:*

- (i) $p_{0j}^l = \delta_{jl}, p_{ij}^0 = \delta_{ij}k_j;$
- (ii) $\sum_{i=0}^d p_{ij}^l = k_j, \sum_{j=0}^d k_j = n;$
- (iii) $p_{ij}^l k_l = p_{il}^j k_j;$
- (iv) $\sum_{l=0}^d p_{ij}^l p_{rl}^s = \sum_{l=0}^d p_{rj}^l p_{il}^s;$

onde δ_{ij} denota o símbolo de Kronecker.

Normalmente os números de interseção são interpretados como entradas das chamadas *matrizes de interseção* L_0, L_1, \dots, L_d :

$$(L_i)_{lj} = p_{ij}^l,$$

onde $L_0 = I_n$.

Dois esquemas associativos clássicos são apresentados nos próximos exemplos (ver [3]).

Exemplo 3.2.1. *O esquema de Johnson, $J(n, k)$, é um esquema associativo com k classes sobre o conjunto de todos os $\binom{n}{k}$ subconjuntos de ordem k de um conjunto fixo com n elementos. Neste esquema, dois elementos x e y são associados de ordem i se e só se $|x \cap y| = k - i$.*

Exemplo 3.2.2. *O esquema de Hamming, $H(n, k)$, é um esquema associativo com n classes sobre o conjunto K^n , onde K é um alfabeto com k símbolos. Assim, K^n é o conjunto de todas as palavras de comprimento n constituídas por letras de K . Duas palavras são associadas de ordem i se diferirem em exactamente i posições coordenadas.*

As classes $\{R_0, R_1, \dots, R_d\}$ de um esquema associativo podem ser descritas através das suas respectivas matrizes de adjacência $\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$, onde cada A_i é uma matriz de ordem n definida por $(A_i)_{xy} = 1$, se $(x, y) \in R_i$, e $(A_i)_{xy} = 0$, caso contrário.

As matrizes $A_i, i \in \{0, 1, \dots, d\}$ satisfazem ainda:

- (i) $A_0 = I_n$;
- (ii) $\sum_{i=0}^d A_i = J_n$;
- (iii) $A_i = A_i^\top, \forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$;
- (iv) $A_i A_j = \sum_{l=0}^d p_{ij}^l A_l, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Note-se que (ii) implica que as matrizes $A_i, i \in \{0, 1, \dots, d\}$ são linearmente independentes. Por outro lado, também se tem (ver [3, Lema 1.3]) que $A_i A_j = A_j A_i$, para todos i, j em $\{0, 1, \dots, d\}$. Então, a álgebra gerada por A_0, A_1, \dots, A_d tem dimensão $d + 1$.

As matrizes A_1, A_2, \dots, A_d podem ser interpretadas como matrizes de adjacência de grafos G_1, G_2, \dots, G_d , com um conjunto de vértices comum V . Dois vértices u e v em V dizem-se *relacionados* com ordem i se uv for uma aresta de G_i , para cada i em $\{1, 2, \dots, d\}$.

Exemplo 3.2.3. Para cada grafo G , considerem-se as seguintes relações

$$R_i = \{(u, v) : \text{dist}(u, v) = i\},$$

para $i \in \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$. Assim, o quadrado (ver Figura 3.6(a)) origina um esquema associativo com duas classes dado pelas matrizes $A_0 = I_4$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & J_2 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} J_2 - I_2 & 0 \\ 0 & J_2 - I_2 \end{pmatrix},$$

enquanto que o hexágono (ver Figura 3.6(b)) origina um esquema associativo com três classes, dadas pelas matrizes $A_0 = I_6$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & J_3 - I_3 \\ J_3 - I_3 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} J_3 - I_3 & 0 \\ 0 & J_3 - I_3 \end{pmatrix}, \text{ e } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

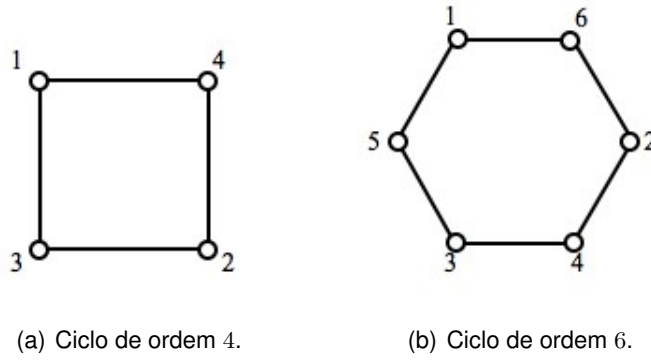


Figura 3.2.6: O quadrado e o hexágono.

Os esquemas associativos mais simples são aqueles com apenas uma classe. Correspondem ao caso $A_0 = I_n$ e $A_1 = J_n - I_n$. Visto G_1 ser o grafo completo esta situação é pouco interessante.

O caso mais simples seguinte contempla os esquemas associativos simétricos com duas classes e é equivalente aos grafos fortemente regulares. De facto, temos $A_0 = I_n$, A_1 , $A_2 = J_n - A_1 - I_n$, onde A_1 e A_2 correspondem às matrizes de adjacência de um grafo fortemente regular e o seu complementar, respetivamente.

Reciprocamente, se A for a matriz de adjacência de um grafo fortemente regular, então $I_n, A, J_n - A - I_n$ formam um esquema associativo com duas classes.

Observe-se que a propriedade (iii) do Teorema 3.2.2 generaliza a equação (3.5), pois trata-se do caso particular $i = l = 1$ e $j = 2$.

Exemplo 3.2.4. *Seja (G, R_1) um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) . Então as matrizes de interseção do esquema associativo são*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & a & k - a - 1 \\ 0 & c & k - c \end{pmatrix} \text{ e } L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n - k - 1 \\ 0 & k - a - 1 & n - 2k + a \\ 1 & k - c & n - 2k + c - 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.2.5. Considere-se o esquema associativo definido pelo conjunto de matrizes $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, com $A_0 = I_6$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este esquema associativo verifica a tabela de multiplicação seguinte (Tabela 3.2.1).

	A_0	A_1	A_2	A_3
A_0	A_0	A_1	A_2	A_3
A_1	A_1	B	C	A_2
A_2	A_2	C	B	A_1
A_3	A_3	A_2	A_1	A_0

Tabela 3.2.1: Tabela de multiplicação dos elementos do conjunto $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, onde $B = 2A_0 + A_2$ e $C = 2A_3 + A_1$.

A partir da tabela de multiplicação e do axioma (d) das matrizes dos esquemas associativos, calculam-se os números de interseção associados e obtêm-se as matrizes de

interseção: $L_0 = I_4$,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes A_0, A_1, \dots, A_d de um esquema associativo geram um álgebra comutativa, \mathcal{A} , com dimensão $d + 1$, de matrizes simétricas de diagonal constante. Esta álgebra é chamada a álgebra de *Bose-Mesner* do esquema associativo devido ao facto de ter sido primeiramente estudada por estes dois matemáticos em [9].

Note-se que \mathcal{A} é uma álgebra de Jordan euclidiana de característica $d + 1$ relativamente ao produto usual de matrizes e ao traço standard do produto de matrizes. A álgebra \mathcal{A} é ainda fechada para o produto de Hadamard e existe um único sistema de Jordan $\{E_0, \dots, E_d\}$ que é uma base de \mathcal{A} . Logo,

$$E_i E_j = \delta_{ij} E_i,$$

$$\sum_{i=0}^d E_i = I_n.$$

Se a matriz A_1 for um elemento regular de \mathcal{A} , os idempotentes E_i podem ser obtidos como projetores associados à matriz A_1 do esquema associativo com d classes através da igualdade

$$E_i = \prod_{l=0, l \neq i}^d \frac{A_1 - \lambda_l I_n}{\lambda_i - \lambda_l}, \quad (3.17)$$

onde os λ_i , com $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, são os valores próprios da primeira decomposição espectral de A_1 .

Exemplo 3.2.6. Continuando o Exemplo 3.2.5, visto que a matriz A_1 possui quatro valores próprios distintos, a saber $\lambda_0 = -2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$, podemos aplicar a fórmula (3.17) para obter as expressões de todos os idempotentes associados à matriz A_1 do esquema associativo, $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{6}A_0 - \frac{1}{6}A_1 + \frac{1}{6}A_2 - \frac{1}{6}A_3, \\ E_1 &= \frac{1}{3}A_0 - \frac{1}{6}A_1 - \frac{1}{6}A_2 + \frac{1}{3}A_3, \\ E_2 &= \frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{6}A_1 - \frac{1}{6}A_2 - \frac{1}{3}A_3, \\ E_3 &= \frac{1}{6}A_0 + \frac{1}{6}A_1 + \frac{1}{6}A_2 + \frac{1}{6}A_3 = \frac{1}{6}J_4. \end{aligned}$$

No caso da matriz A_1 não ser um elemento regular de \mathcal{A} procede-se da seguinte forma. Em primeiro lugar, calculam-se todos os projetores associados à matriz A_1 através da igualdade (3.17) e faz-se o mesmo para pelo menos mais uma outra matriz de adjacência A_i , $i \in \{0, \dots, d\}$, $i \neq 1$, do esquema associativo. Em segundo lugar, calculam-se os produtos entre os projetores de A_1 e os de A_i , até obter $d + 1$ idempotentes não nulos distintos. No Exemplo 3.2.7 ilustramos este processo. Para mais informação sobre o método ver [3, Secção 2.4].

Exemplo 3.2.7. Seja $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ o esquema associativo formado pelas matrizes definidas por $A_0 = I_4$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este esquema associativo advém do quadrado latino:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este esquema associativo verifica a tabela de multiplicação seguinte (Tabela 3.2.2).

	A_0	A_1	A_2	A_3
A_0	A_0	A_1	A_2	A_3
A_1	A_1	A_0	A_3	A_2
A_2	A_2	A_3	A_0	A_1
A_3	A_3	A_2	A_1	A_0

Tabela 3.2.2: Tabela de multiplicação dos elementos do conjunto $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$.

Os valores próprios de cada matriz A_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ são $\lambda_0 = -1$ e $\lambda_1 = 1$. Então, os projetores associados à matriz A_1 são dados por

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2}A_0 - \frac{1}{2}A_1, \\ P_1 &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1, \end{aligned}$$

enquanto que os projetores associados à matriz A_2 são

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2}A_0 - \frac{1}{2}A_2, \\ P_3 &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_2. \end{aligned}$$

Então, o sistema de Jordan deste esquema associativo é $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ onde

$$\begin{aligned} E_0 &= P_0P_2 = \frac{1}{4}A_0 - \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{4}A_2 + \frac{1}{4}A_3, \\ E_1 &= P_1P_2 = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{4}A_2 - \frac{1}{4}A_3, \\ E_2 &= P_0P_3 = \frac{1}{4}A_0 - \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{4}A_2 - \frac{1}{4}A_3, \\ E_3 &= P_1P_3 = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{4}A_2 + \frac{1}{4}A_3 = \frac{1}{4}J_4. \end{aligned}$$

Note-se que cada E_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, é primitivo porque $\text{tr}(E_i) = 1$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, e também que $E_iE_j = 0$, com $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $i \neq j$ pelo processo de construção.

Para além dos números de interseção já introduzidos anteriormente, cada esquema associativo contém mais três famílias de parâmetros: os valores próprios, os valores próprios duais e os parâmetros de Krein. Com efeito, existem escalares $p_i(j)$ e $q_i(j)$ tais que, para

todo $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, temos

$$A_i = \sum_{j=0}^d p_i(j) E_j, \text{ e} \quad (3.18)$$

$$E_i = \sum_{j=0}^d q_i(j) A_j, \quad (3.19)$$

onde os números $p_i(j)$ e $q_i(j)$ são os *valores próprios* e os *valores próprios duais* do esquema associativo, respetivamente. Também definimos a *matriz própria*, P , e a *matriz própria dual*, Q , cada uma de dimensão $(d+1) \times (d+1)$, por $(P)_{ij} = P_{ij} = p_j(i)$ e $(Q)_{ij} = Q_{ij} = q_j(i)$, respetivamente. Através de (3.18) e (3.19) podemos deduzir que $PQ = I_n$. Como consequência, temos que os valores próprios duais são determinados através dos valores próprios de \mathcal{A} .

Exemplo 3.2.8. Os valores próprios do esquema associativo $J(n, k)$, introduzido no Exemplo 3.2.1, são dados por

$$p_i(j) = \sum_{l=0}^i (-1)^{i-l} \binom{k-l}{i-l} \binom{n-k+l-j}{l} \binom{k-j}{l}.$$

Exemplo 3.2.9. Os valores próprios do esquema associativo $H(n, k)$, introduzido no Exemplo 3.2.2, são dados por

$$p_i(j) = \sum_{l=0}^i (-1)^l (k-1)^{i-l} \binom{n-j}{i-l} \binom{j}{l}.$$

Observe-se também que, por (3.18) e (3.19), temos

$$A_j E_i = P_{ij} E_i,$$

o que mostra que os P_{ij} são os valores próprios de A_j e que as colunas de E_i são os vetores próprios correspondentes. Seja $i \in \{1, \dots, n\}$. Então $m_i = \text{car}(E_i)$ é a multiplicidade do valor próprio P_{ij} de A_j , desde que $P_{ij} \neq P_{lj}$, para $l \neq i$. Concluimos então que $m_0 = 1$, $\sum_{i=0}^d m_i = n$ e, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $m_i = \text{tr}(E_i) = n(E_i)_{jj}$, visto que $\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ é uma base de \mathcal{A} . De facto, os valores próprios de E_i pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$ e, portanto, $\text{car}(E_i)$ é igual à soma dos valores próprios.

No resultado que se segue apresentamos algumas propriedades verificadas pelos valores próprios e pelos valores próprios duais de um esquema associativo.

Teorema 3.2.3. [13] *As entradas P_{ij} e Q_{ij} , $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$, das matrizes P e Q , respetivamente, de um esquema associativo com d classes, satisfazem as propriedades seguintes:*

- (i) $P_{i0} = Q_{i0} = 1, P_{0i} = k_i, Q_{0i} = m_i,$
- (ii) $P_{ij}P_{ir} = \sum_{l=0}^d p_{jr}^l P_{il},$
- (iii) $m_i P_{ij} = k_j Q_{ji}, \sum_{l=0}^d m_l P_{lj} P_{li} = n k_j \delta_{ji}, \sum_{l=0}^d k_l Q_{lj} Q_{li} = n m_j \delta_{ji},$
- (iv) $|P_{ij}| \leq k_j, |Q_{ij}| \leq m_j.$

Exemplo 3.2.10. *Seja (G, R_1) um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) . As matrizes P e Q são dadas por:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & k & n-k-1 \\ 1 & \theta & -\theta-1 \\ 1 & \tau & -\tau-1 \end{pmatrix}, Q = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & m_\theta & m_\tau \\ 1 & \frac{m_\theta \theta}{k} & \frac{m_\tau \tau}{k} \\ 1 & -m_\theta \frac{\theta+1}{n-k-1} & -m_\tau \frac{\tau+1}{n-k-1} \end{pmatrix},$$

onde θ, τ, m_θ e m_τ podem ser escritos em termos dos parâmetros do grafo fortemente regular tal como na secção anterior.

Exemplo 3.2.11. *Continuando o Exemplo 3.2.6, temos que as matrizes P e Q são dadas por*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, os *parâmetros de Krein* de um esquema associativo com d classes são os números q_{ij}^l tais que

$$E_i \circ E_j = \sum_{l=0}^d q_{ij}^l E_l.$$

Os parâmetros de Krein podem ser interpretados como os parâmetros duais dos números de interseção e são determinados através dos valores próprios do esquema, a partir da

igualdade:

$$q_{ij}^l = \sum_{m=0}^d Q_{mi} Q_{mj} P_{lm}. \quad (3.20)$$

A expressão (3.20) deduz-se através das igualdades (3.18) e (3.19). Assim como os números de interseção de um esquema associativo podem ser interpretados como as entradas das matrizes de interseção, também consideramos as matrizes $L_0^*, L_1^*, \dots, L_d^*$, tais que $(L_i^*)_{lj} = q_{ij}^l$, normalmente denominadas as *matrizes de interseção duais* do esquema associativo com d classes. Seguidamente apresentamos um conjunto de propriedades conhecidas satisfeitas pelos parâmetros de Krein de um esquema associativo.

Teorema 3.2.4. [13] *Os parâmetros de Krein de um esquema associativo com d classes satisfazem as propriedades seguintes:*

- (i) $q_{0j}^l = \frac{\delta_{jl}}{n}$, $q_{ij}^0 = \frac{\delta_{ij} m_j}{n}$, $q_{ij}^l = q_{ji}^l$,
- (ii) $\sum_{l=0}^d q_{lj}^i = \frac{m_j}{n}$, $\sum_{j=0}^d m_j = n$,
- (iii) $q_{ij}^l m_l = q_{il}^j m_j$,
- (iv) $\sum_{l=0}^d q_{ij}^l q_{rl}^s = \sum_{l=0}^d q_{rj}^l q_{il}^s$,
- (v) $Q_{ij} Q_{ir} = \sum_{l=0}^d q_{jr}^l Q_{il}$,
- (vi) $n^2 m_r q_{ij}^r = \sum_{l=0}^d k_l Q_{li} Q_{lj} Q_{lr}$.

Exemplo 3.2.12. *Continuando o Exemplo 3.2.11, temos que as matrizes de interseção duais do esquema associativo são dadas por:*

$$L_0^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

A relação de dualidade entre os parâmetros de Krein e os números de interseção de um esquema associativo pode ser observada na Tabela 3.2.3.

Números de Interseção	Parâmetros de Krein
$A_i A_j = \sum_{l=0}^d p_{ij}^l A_l$	$E_i \circ E_j = \sum_{l=0}^d q_{ij}^l E_l$
$A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$	$E_i E_j = \delta_{ij} E_i$
$A_i E_j = P_{ji} E_j$	$E_j \circ A_i = Q_{ij} A_i$
$A_i E_0 = k_i E_0$	$E_j \circ A_0 = \frac{m_j}{n} A_0$
$\sum_{i=0}^d A_i = J_n$	$\sum_{i=0}^d E_i = I_n$
$A_0 = I_n$	$E_0 = J_n/n$
$p_{ij}^l k_l = p_{lj}^i k_i$	$q_{ij}^l m_l = q_{lj}^i m_i$

Tabela 3.2.3: Dualidade entre os parâmetros de Krein e os números de interseção.

O facto de que os parâmetros de Krein são números reais não negativos, ver [13, Teorema 3.5], permite-nos extrair as duas condições de Krein apresentadas em (3.24) e (3.25), na Subsecção 3.2.4, para um esquema associativo com duas classes.

Seguidamente demonstramos algumas novas propriedades sobre os parâmetros de Krein de um esquema associativo.

Teorema 3.2.5. *Os parâmetros de Krein de um esquema associativo com d classes satisfazem as propriedades seguintes.*

(i) *Para $l \in \{0, 1, \dots, d\}$, verifica-se a igualdade*

$$\sum_{0 \leq i, j \leq d} q_{ij}^l = 1. \quad (3.21)$$

(ii) *Para $l, r \in \{0, 1, \dots, d\}$, verifica-se a desigualdade*

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq r-1 \\ r \leq j \leq d}} q_{ij}^l \leq \frac{1}{2}. \quad (3.22)$$

Demonstração. (i) A partir da igualdade

$$\left(\sum_{i=0}^d E_i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^d E_j \right) = I_n,$$

concluimos que

$$\left(\sum_{i=0}^d E_i \circ E_j \right) E_l = E_l,$$

donde (3.21) decorre naturalmente.

(ii) Seja $r \in \{1, 2, \dots, d\}$ e B a matriz dada por

$$\begin{aligned} B &= (E_0 + E_1 + \dots + E_{r-1}) \otimes (E_r + E_{r+1} + \dots + E_d) \\ &+ (E_r + E_{r+1} + \dots + E_d) \otimes (E_0 + E_1 + \dots + E_{r-1}). \end{aligned}$$

Como a matriz B é uma matriz idempotente, os seus valores próprios pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$. A matriz B tem uma submatriz principal, C , dada por

$$\begin{aligned} C &= (E_0 + E_1 + \dots + E_{r-1}) \circ (E_r + E_{r+1} + \dots + E_d) \\ &+ (E_r + E_{r+1} + \dots + E_d) \circ (E_0 + E_1 + \dots + E_{r-1}), \end{aligned}$$

(ver [39, Lema 5.1.1]) e, como o produto de Hadamard é comutativo, C é dada simplesmente por

$$C = 2(E_0 + E_1 + \dots + E_{r-1}) \circ (E_r + E_{r+1} + \dots + E_d).$$

Pelo Teorema 2.4.2 temos então que

$$0 \leq 2 \sum_{\substack{0 \leq i \leq r-1 \\ r \leq j \leq d}} q_{ij}^l \leq 1$$

e a desigualdade (3.22) decorre de imediato.

□

O resultado seguinte surge como consequência imediata do Teorema 3.2.5.

Corolário 3.2.1. Para cada $l \in \{0, 1, \dots, d\}$, os parâmetros de Krein de um esquema associativo com d classes satisfazem as desigualdades seguintes:

$$(i) \sum_{i=0}^d q_{ii}^l \leq 1;$$

$$(ii) \min_{i \in \{0, \dots, d\}} \{q_{ii}^l\} \leq \frac{1}{d+1}.$$

O último resultado que vamos provar nesta subsecção apresenta um novo majorante para os parâmetros de Krein do género q_{ij}^l , com $i \neq j$.

Teorema 3.2.6. Para cada $l, i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$, $i \neq j$, temos que $q_{ij}^l \leq \frac{1}{2}$. Para além disso, se existir um $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, $i \neq j$, tal que $q_{ii}^l \neq 0$, então a desigualdade é estrita.

Demonstração. Sejam $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$. A matriz

$$B = \sum_{\substack{0 \leq r \leq d \\ r \neq j}} (E_r \otimes E_r) + E_i \otimes E_j + E_j \otimes E_i$$

é uma matriz idempotente que possui uma submatriz principal, C , dada por

$$C = \sum_{\substack{0 \leq r \leq d \\ r \neq j}} (E_r \circ E_r) + E_i \circ E_j + E_j \circ E_i,$$

(ver [39, Lema 5.1.1]). Para cada $l \in \{0, 1, \dots, d\}$ temos também que

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{\substack{0 \leq r \leq d \\ r \neq j}} (E_r \circ E_r) + E_i \circ E_j + E_j \circ E_i \right] E_l \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r \leq d \\ r \neq j}} [(E_r \circ E_r) E_l] + (E_i \circ E_j) E_l + (E_j \circ E_i) E_l \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r \leq d \\ r \neq j}} (q_{rr}^l E_l) + q_{ij}^l E_l + q_{ji}^l E_l. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 2.4.2, os valores próprios de C estão compreendidos entre 0 e 1 e, portanto, para cada $l \in \{0, 1, \dots, d\}$ temos

$$0 \leq \sum_{\substack{0 \leq r \leq d \\ r \neq j}} (q_{rr}^l) + 2q_{ij}^l \leq 1. \quad (3.23)$$

Pela propriedade (i) do Corolário 3.2.1, a partir de (3.23), concluímos as afirmações do Teorema 3.2.6. \square

Vamos terminar esta secção com dois exemplos que mostram que o majorante obtido no Teorema 3.2.6 não pode ser melhorado. No exemplo seguinte construímos um esquema associativo com duas classes baseado no artigo [19] e utilizando uma notação semelhante.

Exemplo 3.2.13. *Seja n um número natural par e $U_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ as matrizes definidas por $(U_{i,j})_{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$, para $i, j, p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$. Seja $m = \frac{n}{2} + 1$. Agora, consideramos a família de matrizes $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$ tal que:*

- $B_1 = I_n$
- $B_r = \sum_{l=r}^n U_{l, l-r+1} + \sum_{l=r}^n U_{l-r+1, l} + \sum_{l=1}^{r-1} U_{n-r+1+l, l} + \sum_{l=1}^{r-1} U_{l, n-r+1+l},$
 $r = 2, \dots, m;$
- $B_m = \sum_{l=1}^{m-1} U_{n-m+1+l, l} + \sum_{l=1}^{m-1} U_{l, n-m+1+l}.$

A partir da definição, as matrizes $A_j, j \in \{2, \dots, m\}$ são matrizes simétricas de diagonal nula.

Para $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, definimos também as matrizes C_i através da fórmula

$$(C_i)_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{se } q = p \oplus_n i, \\ 0 & \text{se } q \neq p \oplus_n i, \end{cases},$$

onde \oplus_n denota aqui a soma módulo n . As matrizes $C_i, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ chamam-se matrizes circulantes. Então, temos que as matrizes $B_j, j \in \{2, \dots, m\}$ podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} B_1 &= C_0 \\ B_j &= C_{j-1} + C_{n-j-1}, \quad j \in \{2, \dots, m-1\} \\ B_m &= C_{m-1}. \end{aligned}$$

Como as matrizes C_i são comutativas, então \mathcal{F} é uma família de matrizes comutativa.

A partir do exposto acima, vamos construir um esquema associativo com duas classes, $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2\}$, onde:

$$\begin{aligned} A_0 &= I_n \\ A_1 &= \sum_{i=2}^{m-1} B_i \\ A_2 &= J_n - A_1 - I_n. \end{aligned}$$

Para a matriz A_1 deste esquema associativo o polinómio mínimo é

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - n + 2).$$

A base de idempotentes mínimos de \mathcal{A} é o conjunto $\{E_0, E_1, E_2\}$ dado por

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{n} J_n, \\ E_1 &= \frac{1}{2} I_n - \frac{1}{2} (J_n - A - I_n), \\ E_2 &= \frac{n-2}{2n} I_n - \frac{1}{n} A + \frac{n-2}{2n} (J_n - A - I_n). \end{aligned}$$

Então o parâmetro de Krein q_{12}^1 pode ser escrito como

$$q_{12}^1 = \frac{n-2}{2n},$$

que converge para $1/2$ quando n tende para o infinito.

Como os esquemas associativos de duas classes são casos particulares de esquemas associativos, através do Exemplo 3.2.13 concluímos desde já que o novo majorante, $1/2$, obtido para os parâmetros de Krein q_{ij}^l , $i \neq j$, no Teorema 3.2.6, é ótimo para um esquema associativo com um qualquer número de classes.

No exemplo seguinte apresentamos uma família infinita de esquemas associativos com três classes cujos parâmetros de Krein convergem para $1/2$. Esta família é construída a partir de designs simétricos e é estudada em [57].

Dado um conjunto de pontos \mathcal{P} e um conjunto de blocos \mathcal{B} , onde um *bloco* é um subconjunto de \mathcal{P} , o par ordenado $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ diz-se um *design simétrico* com parâmetros (n, k, c) se satisfizer as propriedades seguintes:

- (i) \mathcal{B} é um subconjunto do conjunto das potências de \mathcal{P} ;

$$(ii) \quad |\mathcal{P}| = |\mathcal{B}| = n;$$

$$(iii) \quad \forall b \in \mathcal{B}, |b| = k;$$

$$(iv) \quad \forall p \in \mathcal{P}, |\{b \in \mathcal{B} : p \in b\}| = k;$$

$$(v) \quad \forall p_1, p_2 \in \mathcal{P}, p_1 \neq p_2, |\{b \in \mathcal{B} : p_1, p_2 \in b\}| = c;$$

$$(vi) \quad \forall b_1, b_2 \in \mathcal{B}, b_1 \neq b_2, |\{p \in \mathcal{P} : p \in b_1 \wedge p \in b_2\}| = c.$$

Exemplo 3.2.14. *Dado um design simétrico com parâmetros (n, k, c) , constrói-se, tal como em [57], um esquema associativo com três classes do seguinte modo. Seja $X = \mathcal{P} \cup \mathcal{B}$. Definem-se as seguintes relações em $X \times X$:*

$$R_0 = \{(x, x) : x \in X\};$$

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{B} : x \in y\} \cup \{(y, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{P} : x \in y\};$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : x \neq y\} \cup \{(x, y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : x \neq y\};$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{B} : x \notin y\} \cup \{(y, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{P} : x \notin y\}.$$

Utilizando os axiomas de design simétrico (i) – (vi) demonstra-se que R_0, R_1, R_2, R_3 formam efetivamente um esquema associativo com três classes sobre X . As matrizes de interseção duais desta família de esquemas associativos são dadas por: $L_0^ = I_4/2n$,*

$$L_1^* = \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} 0 & n-1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{n-2}{2} + \frac{n-2k}{2\sqrt{k-c}} & \frac{n-2}{2} - \frac{n-2k}{2\sqrt{k-c}} & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{2} - \frac{n-2k}{2\sqrt{k-c}} & \frac{n-2}{2} + \frac{n-2k}{2\sqrt{k-c}} & 1 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2^* = \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{2} - \frac{n-2k}{2\sqrt{k-c}} & \frac{n-2}{2} + \frac{n-2k}{2\sqrt{k-c}} & 1 \\ 1 & \frac{n-2}{2} + \frac{n-2k}{2\sqrt{k-c}} & \frac{n-2}{2} - \frac{n-2k}{2\sqrt{k-c}} & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3^* = \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir das matrizes de interseção duais apresentadas é possível extrair alguns exemplos que evidenciam claramente a optimalidade do nosso majorante $1/2$, para parâmetros de Krein do género q_{ij}^l , com $i \neq j$. Com efeito, podemos observar que

$$q_{12}^3 = (L_1^*)_{32} = \frac{n-1}{2n}$$

e, portanto, este valor tende para $1/2$, quando n tende para infinito.

3.2.4 Condições de Admissibilidade

Um problema importante no estudo dos grafos fortemente regulares centra-se na procura de condições de admissibilidade sobre o conjunto dos seus parâmetros, isto é, condições que consigam separar os conjuntos de parâmetros que podem originar grafos fortemente regulares, ditos admissíveis, daqueles que não podem, os não admissíveis. Ao longo desta secção vamos procurar apresentar as condições de admissibilidade que são usadas atualmente para filtrar conjuntos de parâmetros.

Na Subsecção 3.2.1 já foram apresentadas algumas condições de admissibilidade que qualquer conjunto de parâmetros de um grafo fortemente regular tem que satisfazer. Assim, dado um (n, k, a, c) -grafo fortemente regular temos que:

- A fórmula (3.3) tem que originar um número positivo.
- A equação (3.5) tem que ser verificada.
- As fórmulas das multiplicidades dos valores próprios, (3.11) e (3.12) têm que produzir inteiros positivos.

Para além destas condições temos as seguintes não triviais. Os valores próprios de um grafo fortemente regular, k , θ e τ , satisfazem as seguintes desigualdades, conhecidas como as *condições de Krein*, [55]:

$$(\theta + 1)(k + \theta + 2\theta\tau) \leq (k + \theta)(\tau + 1)^2, \quad (3.24)$$

$$(\tau + 1)(k + \tau + 2\theta\tau) \leq (k + \tau)(\theta + 1)^2. \quad (3.25)$$

Estas condições necessárias de existência de um grafo fortemente regular excluem, entre muitos outros, os conjuntos de parâmetros $(184, 135, 102, 90)$ e $(184, 48, 2, 16)$, através de (3.24) e (3.25), respetivamente.

Para além das condições (3.24) e (3.25), foi provado (ver [24]) que as multiplicidades m_θ e m_τ também têm que satisfazer as desigualdades seguintes, denominadas os *limites absolutos de Seidel*:

$$n \leq \frac{m_\theta(m_\theta + 3)}{2}, \quad (3.26)$$

$$n \leq \frac{m_\tau(m_\tau + 3)}{2}. \quad (3.27)$$

Os limites absolutos de Seidel, (3.26) e (3.27), excluem respetivamente os conjuntos de parâmetros $(50, 21, 4, 12)$ e $(50, 28, 18, 12)$, entre outros.

Estes majorantes de n foram melhorados por Neumaier em [51]:

$$n \leq \frac{m_\theta(m_\theta + 1)}{2} \text{ se } q_{11}^1 \neq 0, \quad (3.28)$$

$$n \leq \frac{m_\tau(m_\tau + 1)}{2} \text{ se } q_{22}^2 \neq 0. \quad (3.29)$$

As condições melhoradas de Neumaier, (3.28) e (3.29), eliminam, por exemplo, os conjuntos de parâmetros $(841, 640, 474, 528)$ e $(841, 200, 87, 35)$, respetivamente.

Pelo Lema 3.2.2 da Subsecção 3.2.1, caracterizámos os grafos de conferência como sendo grafos com o conjunto de parâmetros $(n, (n-1)/2, (n-5)/4, (n-1)/4)$. Nessa subsecção também referimos que estes grafos são originados por matrizes de conferência, C , de dimensão $n+1$. Sabe-se (ver [5, 44]) que tais matrizes de conferência C só existem se n for a soma de dois quadrados. Esta propriedade permite-nos excluir vários potenciais conjuntos de parâmetros de grafos de conferência como por exemplo o conjunto $(21, 10, 4, 5)$.

Finalmente, A. E. Brouwer obteve a partir de um resultado de Neumaier (ver [52, Teorema 4.7]) a condição seguinte (ver [11]), conhecida por *the claw bound*, em inglês.

Teorema 3.2.7 (Teorema 21.7, [45]). *Seja G um grafo fortemente regular de parâmetros (n, k, a, c) , tais que $0 < c < k < n - 1$, cuja matriz de adjacência tem os valores próprios k, θ e τ . Se $c \neq \tau^2$ e $c \neq \tau(\tau + 1)$, então*

$$2(\theta + 1) \leq \tau(\tau + 1)(c + 1). \quad (3.30)$$

O Teorema 3.2.7 permite-nos afirmar, por exemplo, que não existe nenhum grafo fortemente regular com o conjunto de parâmetros $(2058, 242, 91, 20)$.

Assim sendo, dizemos que um conjunto de parâmetros (n, k, a, c) é *admissível*, se as fórmulas (3.3), (3.11) e (3.12) produzirem inteiros positivos, se satisfizer a igualdade (3.5) e as desigualdades (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) e (3.30), para além da propriedade referida dos grafos de conferência.

Com estas condições muitos conjuntos de parâmetros são excluídos como possíveis grafos fortemente regulares. No entanto, existem muitos outros conjuntos admissíveis para os quais não sabemos se existe um grafo fortemente regular correspondente. No próximo capítulo são deduzidas novas condições para tentar responder a este problema.

Capítulo 4

Álgebras de Jordan Euclidianas e Grafos Fortemente Regulares

Neste capítulo final exploramos as relações entre uma álgebra de Jordan euclidiana e um grafo fortemente regular ou, mais precisamente, com a sua matriz de adjacência, tendo em vista a obtenção de novos resultados sobre os parâmetros e o espectro de um grafo fortemente regular.

O capítulo está organizado como se segue. Na Secção 4.1 apresentamos e caracterizamos a álgebra de Jordan euclidiana associada à matriz de adjacência de um grafo fortemente regular. Esta álgebra particular será utilizada nas secções posteriores. Na Secção 4.2 generalizamos os parâmetros de Krein de um grafo fortemente regular e esta generalização permitiu-nos obter novas condições generalizadas de admissibilidade, algumas das quais são analisadas e testadas na Secção 4.3. Esta generalização dos parâmetros de Krein também nos conduziu, na Secção 4.4, à obtenção de um novo majorante para alguns dos parâmetros de Krein, bem como a alguns resultados associados. Na Secção 4.5, através da construção de uma série binomial generalizada de elementos do sistema de Jordan da álgebra associada à matriz de adjacência, obtivemos novas condições de admissibilidade sobre os parâmetros de um grafo fortemente regular. Na Secção 4.6 aplicámos o mesmo raciocínio a outras séries funcionais com termos positivos, como sendo as funções hiperbólicas do seno e do cosseno. Estas novas condições de

admissibilidade permitiram-nos extrair algumas conclusões sobre o comportamento do espectro dos grafos fortemente regulares. As Secções 4.3, 4.5 e 4.6 são acompanhadas de resultados experimentais organizados em tabelas. Estes resultados podem ser encontrados em [22, 46, 47, 48, 62, 63, 64]. Terminamos este capítulo com a Secção 4.7, onde analisamos os resultados obtidos e identificamos alguns objetivos futuros no trabalho nesta área.

4.1 Uma Álgebra de Jordan Euclidiana Associada à Matriz de Adjacência de um Grafo Fortemente Regular

Ao longo deste texto vamos considerar a álgebra de Jordan euclidiana $(\mathcal{V}_n, \bullet, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, tal como foi definida ao longo dos Exemplos 2.1.1, 2.2.1 e 2.3.1, onde \bullet designa o produto de Jordan, definido em (2.2) e o produto interno é dado por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$. Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) , tais que $0 < c \leq k < n - 1$, e seja A a sua matriz de adjacência, cujos valores próprios são k, θ e τ , dados em (3.9) e (3.10).

Consideramos agora a subálgebra de \mathcal{V}_n , que designamos por \mathcal{V}'_n , que é a álgebra gerada pela matriz identidade I_n e pelas potências naturais de A . Como o operador linear $L(A)$ é um operador linear simétrico entre \mathcal{V}'_n e \mathcal{V}'_n com apenas três valores próprios distintos, a saber k, θ e τ , podemos concluir que $\Upsilon = \{E_0, E_1, E_2\}$ é o único sistema completo de idempotentes ortogonais de \mathcal{V}'_n associado a A , onde

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{A^2 - (\theta + \tau)A + \theta\tau I_n}{(k - \theta)(k - \tau)} = \frac{J_n}{n}, \\ E_1 &= \frac{A^2 - (k + \tau)A + k\tau I_n}{(\theta - \tau)(\theta - k)}, \\ E_2 &= \frac{A^2 - (k + \theta)A + k\theta I_n}{(\tau - \theta)(\tau - k)}, \end{aligned}$$

Note-se que as expressões para os idempotentes E_i foram obtidas através da aplicação da fórmula (3.17).

Como a decomposição espectral de A é

$$A = kE_0 + \theta E_1 + \tau E_2,$$

concluimos que

$$A^m = k^m E_0 + \theta^m E_1 + \tau^m E_2, \forall m \in \mathbb{N}_0$$

e, portanto, o conjunto Υ gera \mathcal{V}'_n . Por outro lado, como $\{E_0, E_1, E_2\}$ é um conjunto linearmente independente de \mathcal{V}'_n , então Υ é uma base de \mathcal{V}'_n . Podemos então afirmar que \mathcal{V}' tem dimensão 3 e que Υ é um sistema de idempotentes ortogonais de \mathcal{V}' .

Temos também que

$$(A - kI_n)(A^2 - (\tau + \theta)A + \tau\theta I_n) = 0,$$

onde 0 representa aqui a matriz nula. Então, segue que

$$A^3 = A^2(\tau + \theta + k) - (\tau\theta + (\tau + \theta)k)A + k\tau\theta I_n,$$

pelo que podemos concluir que $\{I_n, A, A^2, A^3\}$ é um conjunto linearmente dependente. Vejamos que $\{I_n, A, A^2\}$ é um conjunto linearmente independente de \mathcal{V}'_n . Sejam α, β e γ números reais. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & \theta & \theta^2 \\ 1 & \tau & \tau^2 \end{vmatrix} = (\theta - k)(\tau - k)(\tau - \theta) \neq 0,$$

então

$$\begin{aligned} & \alpha I_n + \beta A + \gamma A^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha E_1 + \alpha E_2 + \alpha E_3 + \beta(kE_1 + \theta E_2 + \tau E_3) + \gamma(k^2 E_1 + \theta E_2 + \tau^2 E_3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\alpha + k\beta + k^2\gamma)E_1 + (\alpha + \theta\beta + \theta^2\gamma)E_2 + (\alpha + \tau\beta + \tau^2\gamma)E_3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha + k\beta + k^2\gamma = 0 \\ \alpha + \theta\beta + \theta^2\gamma = 0 \\ \alpha + \tau\beta + \tau^2\gamma = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0. \end{aligned}$$

Assim, concluimos que $\{I_n, A, A^2\}$ é um conjunto linearmente independente de \mathcal{V}'_n e, por conseguinte, o menor número natural l tal que o conjunto

$$\{I_n, A, A^2, \dots, A^l\}$$

é linearmente dependente é 3, o que é o mesmo que dizer que $\text{car}(A) = 3$. Ora, como a dimensão de \mathcal{V}'_n é 3, segue que $\text{car}(\mathcal{V}'_n) = 3$.

Concluimos, assim, que \mathcal{V}'_n é uma álgebra de Jordan euclidiana de característica 3 e que Υ é um sistema completo de idempotentes ortogonais de \mathcal{V}'_n .

Usando a base $\{I_n, A, J_n - A - I_n\}$ de \mathcal{V}'_n podemos escrever os elementos de Υ do seguinte modo, mais vantajoso a nível de cálculo:

$$E_0 = \frac{\theta - \tau}{n(\theta - \tau)} I_n + \frac{\theta - \tau}{n(\theta - \tau)} A + \frac{\theta - \tau}{n(\theta - \tau)} (J_n - A - I_n), \quad (4.1)$$

$$E_1 = \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} I_n + \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} A + \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} (J_n - A - I_n), \quad (4.2)$$

$$E_2 = \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} I_n + \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} A + \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} (J_n - A - I_n). \quad (4.3)$$

4.2 Uma Generalização dos Parâmetros de Krein

O trabalho que se apresenta ao longo desta secção e da próxima está redigido em [22] e encontra-se submetido para publicação. Um *extended abstract* menos detalhado, mas que contém alguns dos resultados que serão expostos, encontra-se publicado em [62].

Vamos iniciar esta secção com alguma notação que será utilizada de agora em diante.

Para $A \in M_n(\mathbb{R})$ e um natural p , denotamos por $A^{\circ p}$ e $A^{\otimes p}$ a *potência de Hadamard* de ordem p de A e a *potência de Kronecker* de ordem p de A , respetivamente, com $A^{\circ 1} = A$ e $A^{\otimes 1} = A$.

Vamos agora introduzir uma notação compacta para as potências de Hadamard e de Kronecker dos elementos de Υ . Sejam x, y, z, α, β e γ números naturais tais que $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2, x \geq 2$ e $\alpha < \beta$. Então, definimos as seguintes composições de Hadamard dos elementos de Υ ,

$$\begin{aligned} E_{\alpha}^{\circ x} &= (E_{\alpha})^{\circ x}, \\ E_{\alpha\beta}^{\circ yz} &= (E_{\alpha})^{\circ y} \circ (E_{\beta})^{\circ z}, \\ E_{\alpha \oplus \beta}^{\circ x} &= (E_{\alpha} + E_{\beta})^{\circ x}, \\ E_{\gamma(\alpha \oplus \beta)}^{\circ yz} &= (E_{\gamma})^{\circ y} \otimes (E_{\alpha} + E_{\beta})^{\circ z}, \end{aligned}$$

bem como as respectivas composições de Kronecker dos elementos de Υ ,

$$\begin{aligned} E_{\alpha}^{\otimes x} &= (E_{\alpha})^{\otimes x}, \\ E_{\alpha\beta}^{\otimes yz} &= (E_{\alpha})^{\otimes y} \otimes (E_{\beta})^{\otimes z}, \\ E_{\alpha \oplus \beta}^{\otimes x} &= (E_{\alpha} + E_{\beta})^{\otimes x}, \\ E_{\gamma(\alpha \oplus \beta)}^{\otimes yz} &= (E_{\gamma})^{\otimes y} \otimes (E_{\alpha} + E_{\beta})^{\otimes z}. \end{aligned}$$

Visto \mathcal{V}'_n ser uma álgebra fechada para o produto de Hadamard e Υ ser uma base de \mathcal{V}'_n , então existem números reais $q_{\alpha x}^i$, $q_{\alpha\beta yz}^i$, $q_{(\alpha \oplus \beta)x}^i$ e $q_{\gamma(\alpha \oplus \beta)yz}^i$, tais que

$$E_{\alpha}^{\circ x} = \sum_{i=0}^2 q_{\alpha x}^i E_i, \quad (4.4)$$

$$E_{\alpha\beta}^{\circ yz} = \sum_{i=0}^2 q_{\alpha\beta yz}^i E_i, \quad (4.5)$$

$$E_{\alpha \oplus \beta}^{\circ x} = \sum_{i=0}^2 q_{(\alpha \oplus \beta)x}^i E_i \text{ e} \quad (4.6)$$

$$E_{\gamma(\alpha \oplus \beta)}^{\circ yz} = \sum_{i=0}^2 q_{\gamma(\alpha \oplus \beta)yz}^i E_i. \quad (4.7)$$

Note-se, no sentido de clarificar a notação usada, que as letras gregas são usadas para identificar os índices dos idempotentes enquanto que as letras latinas são usadas para identificar os expoentes das potências de Hadamard (Kronecker).

Aos números $q_{\alpha x}^i$ e $q_{\alpha\beta yz}^i$ chamamos os *parâmetros generalizados de Krein* do grafo fortemente regular G , dado que $q_{\alpha 2}^i$ e $q_{\alpha\beta 11}^i$ correspondem precisamente aos parâmetros de Krein.

O comportamento particular dos parâmetros $q_{\alpha x}^i$, $q_{\alpha\beta yz}^i$, $q_{(\alpha \oplus \beta)x}^i$ e $q_{\gamma(\alpha \oplus \beta)yz}^i$ permite-nos provar o resultado seguinte que apresenta um conjunto de novas desigualdades sobre os parâmetros de um grafo fortemente regular.

Teorema 4.2.1. [22] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) tais que $0 < c \leq k < n - 1$, e matriz de adjacência A cujos valores próprios são k, θ e τ . Então, para os naturais x, y, z, α, β e γ tais que $0 \leq i, \alpha, \beta, \gamma \leq 2$, e $\alpha < \beta$, temos*

$$(i) \quad 0 \leq q_{\alpha x}^i \leq 1;$$

$$(ii) \quad 0 \leq q_{\alpha\beta yz}^i \leq 1;$$

$$(iii) \quad 0 \leq q_{(\alpha \oplus \beta)x}^i \leq 1;$$

$$(iv) \quad 0 \leq q_{\gamma(\alpha \oplus \beta)yz}^i \leq 1.$$

Demonstração. Pelo Teorema do Entrelaçamento de valores próprios (Teorema 2.4.2), visto $E_{\alpha}^{\circ x}$ ser uma submatriz principal da matriz idempotente $E_{\alpha}^{\otimes x}$, cujos valores próprios são 0 ou 1, os valores próprios $q_{\alpha x}^i$ de $E_{\alpha}^{\circ x}$, para $0 \leq i \leq 2$, são tais que $0 \leq q_{\alpha x}^i \leq 1$, o que prova (i). Agora aplicamos o mesmo argumento às matrizes $E_{\alpha\beta}^{\circ yz}$, $E_{\alpha \oplus \beta}^{\circ x}$ e $E_{\gamma(\alpha \oplus \beta)}^{\circ yz}$, para provar (ii), (iii) e (iv), respetivamente. \square

As desigualdades apresentadas no Teorema 4.2.1 produzem várias novas condições de admissibilidade sobre os parâmetros de um grafo fortemente regular, às quais chamamos as *condições de admissibilidade generalizadas de Krein*, uma vez que as condições de Krein são casos particulares destas. Vamos considerar algumas dessas desigualdades na próxima secção e apresentar alguns resultados experimentais.

4.3 Condições de Admissibilidade Generalizadas de Krein

Nesta secção vamos considerar algumas das condições generalizadas de Krein originadas pelo Teorema 4.2.1 e apresentar alguns resultados computacionais.

Considere-se o parâmetro generalizado de Krein q_{2x}^0 cuja expressão obtém-se do seguinte modo. Temos que

$$E_2^{\circ x} = \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x I_n + \left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x A + \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x (J_n - A - I_n),$$

com $E_2^{\circ x} = q_{2x}^0 E_0 + q_{2x}^1 E_1 + q_{2x}^2 E_2$, pelo que

$$E_2^{\circ x} E_0 = \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x E_0 + \left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x k E_0 + \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x (n - k - 1) E_0$$

e, portanto, da igualdade

$$\left[\left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x + \left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x k + \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x (n - k - 1) \right] E_0 = q_{2x}^0 E_0$$

resulta que

$$q_{2x}^0 = \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x + \left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x k + \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x (n - k - 1).$$

Observe-se que o parâmetro “clássico” correspondente, com $x = 2$, produz uma desigualdade que é sempre positiva e, portanto, trivialmente satisfeita. Contudo, o mesmo não sucede com o parâmetro de Krein generalizado q_{2x}^0 com x ímpar. De facto, na Tabela 4.3.1, podemos observar exemplos de conjuntos de parâmetros que falham a condição generalizada de Krein q_{2x}^1 , para alguns valores de x . Os conjuntos de parâmetros analisados foram:

- $P_1 = (1024, 385, 36, 210)$,
- $P_2 = (1056, 180, 4, 36)$ e
- $P_3 = (1296, 481, 40, 260)$.

Na Tabela 4.3.1 também são fornecidos os valores próprios respetivos, θ e τ .

Parâmetros	P_1	P_2	P_3
θ	1	4	1
τ	-175	-36	-221
q_{23}^0	-1.1×10^{-5}	-4.3×10^{-4}	-7.0×10^{-6}
q_{25}^0	-1.6×10^{-10}	1.2×10^{-5}	-6.9×10^{-11}
q_{27}^0	-8.4×10^{-16}	1.3×10^{-7}	-3.4×10^{-16}

Tabela 4.3.1: Resultados numéricos de q_{2x}^0 para P_1 , P_2 e P_3 .

Relativamente ao parâmetro q_{2x}^2 ,

$$q_{2x}^2 = \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x + \left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x \tau + \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^x (-\tau - 1),$$

obtivemos os resultados patentes na Tabela 4.3.2. Observe-se que neste caso o expoente x deve tomar apenas valores pares. Na Tabela 4.3.2, são considerados os mesmos conjuntos de parâmetros que foram objeto de análise na Tabela 4.3.1, já que também são exemplos que violam a condição dada por q_{2x}^2 . Assim, para alguns valores de x , consideramos os conjuntos de parâmetros:

- $P_1 = (1024, 385, 36, 210)$,
- $P_2 = (1056, 180, 4, 36)$ e
- $P_3 = (1296, 481, 40, 260)$.

Na Tabela 4.3.2 também são fornecidos os valores próprios respectivos, θ e τ .

Parâmetros	P_1	P_2	P_3
θ	1	4	1
τ	-175	-36	-221
q_{22}^2	-1.4×10^{-3}	-4.2×10^{-3}	-1.1×10^{-3}
q_{24}^2	-2.1×10^{-8}	1.1×10^{-4}	-1.1×10^{-8}
q_{26}^2	-1.1×10^{-13}	1.3×10^{-6}	-5.5×10^{-14}

Tabela 4.3.2: Resultados numéricos de q_{2x}^2 para P_1 , P_2 e P_3 .

Considerem-se agora os parâmetros generalizados de Krein:

$$q_{1x}^0 = \left(\frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^x + \left(\frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^x k + \left(\frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^x (n - k - 1),$$

$$q_{1x}^1 = \left(\frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^x + \left(\frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^x \theta + \left(\frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^x (-\theta - 1).$$

Na Tabela 4.3.3, podemos observar exemplos de conjuntos de parâmetros que falham a condição generalizadas de Krein q_{1x}^0 e q_{1x}^1 para alguns valores de x . Os conjuntos de parâmetros analisados foram:

- $P_4 = (1024, 638, 462, 290)$,
- $P_5 = (1225, 872, 651, 545)$ e
- $P_6 = (1288, 975, 750, 700)$.

Na Tabela 4.3.3 também são fornecidos os valores próprios respectivos, θ e τ .

Parâmetros	P_4	P_5	P_6
θ	174	109	55
τ	-2	-3	-5
q_{13}^0	-1.1×10^{-5}	-4.6×10^{-5}	-2.2×10^{-4}
q_{14}^1	-2.1×10^{-8}	-3.9×10^{-9}	2.3×10^{-3}

Tabela 4.3.3: Resultados numéricos de q_{1x}^0 e q_{1x}^1 para P_4 , P_5 e P_6 .

As generalizações obtidas em (4.4)-(4.7) permitiram-nos extrair novas condições sobre os parâmetros de Krein, condições essas que são descritas na próxima secção.

4.4 Novo Majorante para os Parâmetros de Krein

A generalização dos parâmetros de Krein de um grafo fortemente regular obtida na Secção 4.2 permitiu-nos obter mais informação acerca dos parâmetros de Krein “clássicos”. O resultado seguinte contém uma condição nova sobre a soma destes parâmetros.

Teorema 4.4.1. [22] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) tais que $0 < c \leq k < n - 1$, e matriz de adjacência A cujos valores próprios são k , θ e τ . Considerem-se os parâmetros de Krein “clássicos” $q_{\alpha 2}^i$ e $q_{\alpha\beta 11}^i$, com $i, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, tais que $0 \leq i, \alpha, \beta \leq 2$, e $\alpha < \beta$ tal como definidos em (4.4). Então*

$$0 \leq q_{\alpha 2}^i + 2q_{\alpha\beta 11}^i + q_{\beta 2}^i \leq 1. \quad (4.8)$$

Demonstração. Como a matriz $E_{\alpha\oplus\beta}^{\circ 2}$ é uma submatriz principal de $E_{\alpha\oplus\beta}^{\otimes 2}$, então, pelo Teorema 2.4.2, temos que $0 \leq q_{(\alpha\oplus\beta)2}^i \leq 1$. Observe-se que

$$\begin{aligned} E_{\alpha\oplus\beta}^{\circ 2} &= (E_\alpha + E_\beta) \circ (E_\alpha + E_\beta) \\ &= E_\alpha \circ E_\alpha + 2(E_\alpha \circ E_\beta) + E_\beta \circ E_\beta, \end{aligned}$$

e, portanto, $q_{(\alpha\oplus\beta)2}^i = q_{\alpha 2}^i + 2q_{\alpha\beta 11}^i + q_{\beta 2}^i$. A desigualdade (4.9) resulta de imediato. \square

Uma consequência imediata do Teorema 4.4.1 apresenta-se no corolário seguinte.

Corolário 4.4.1. [22] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) tais que $0 < c \leq k < n - 1$, e matriz de adjacência A tem os valores próprios k , θ e τ . Considerem-se os parâmetros de Krein “clássicos” $q_{\alpha 2}^i$ e $q_{\alpha\beta 11}^i$, com $i, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, tais que $0 \leq i, \alpha, \beta \leq 2$, e $\alpha < \beta$ tal como definidos em (4.4). Então*

$$\min\{q_{\alpha 2}^i, q_{\alpha\beta 11}^i, q_{\beta 2}^i\} \leq \frac{1}{4}. \quad (4.9)$$

O resultado seguinte estabelece uma fórmula para o majorante do parâmetro de Krein generalizado $q_{\alpha\beta yz}^i$, com $\alpha \neq \beta$. Esta fórmula produz majorantes que são sempre menores do que 1, ou seja, limites superiores mais apertados.

Teorema 4.4.2. [22] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) tais que $0 < c \leq k < n - 1$, e matriz de adjacência A cujos valores próprios são k , θ e τ . Considerem-se os parâmetros de Krein generalizados $q_{\alpha\beta yz}^i$, com $i, y, z, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, tais que $0 \leq i, \alpha, \beta \leq 2$, e $\alpha < \beta$ tal como definido em (4.5). Então*

$$0 \leq q_{\alpha\beta yz}^i \leq \frac{1}{\binom{y+z}{z}}.$$

Demonstração. Considere-se o somatório

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^{yz} = & \underbrace{E_\alpha \otimes E_\alpha \otimes \cdots \otimes E_\alpha}_{y \text{ times}} \underbrace{E_\beta \otimes E_\beta \otimes \cdots \otimes E_\beta}_{z \text{ times}} + \\ & + \underbrace{E_\alpha \otimes E_\alpha \otimes \cdots \otimes E_\alpha}_{y-1 \text{ times}} \otimes E_\beta \otimes E_\alpha \otimes \underbrace{E_\beta \otimes E_\beta \otimes \cdots \otimes E_\beta}_{z-1 \text{ times}} + \\ & + \cdots + \underbrace{E_\beta \otimes E_\beta \otimes \cdots \otimes E_\beta}_{z \text{ times}} \otimes \underbrace{E_\alpha \otimes E_\alpha \otimes \cdots \otimes E_\alpha}_{y \text{ times}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

que consiste de $\binom{z+y}{z}$ parcelas de produtos de Kronecker dos idempotentes E_α e E_β , tal que $0 \leq \alpha, \beta \leq 2$ e $\alpha \neq \beta$, onde, em cada parcela, E_β ocorre z vezes nas $y + z$ posições possíveis e E_α ocorre nas restantes, de entre todas as permutações com repetição possíveis.

Visto que, para matrizes A, B, C e D em $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a igualdade

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

é válida, tendo em consideração que E_α e E_β são ortogonais para o produto usual de matrizes, então $S_{\alpha\beta}^{yz}$ é um idempotente e, portanto, os seus valores próprios são 0 e 1.

Por outro lado, e como o produto de Hadamard é comutativo, $\binom{y+z}{z} E_{\alpha\beta}^{yz}$ é uma submatriz principal de $S_{\alpha\beta}^{yz}$. Assim, pelo Teorema do Entrelaçamento de valores próprios, segue que

$$0 \leq \binom{y+z}{z} q_{\alpha\beta yz}^i \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq q_{\alpha\beta yz}^i \leq \frac{1}{\binom{y+z}{z}}.$$

□

A partir do Teorema 4.4.2, fazendo $y = z = 1$ e $\alpha \neq \beta$, obtemos $q_{\alpha\beta 11}^i \leq \frac{1}{2}$ o que constitui um majorante mais apertado quando comparado com 1, o majorante conhecido para os parâmetros de Krein. Para além disso, relativamente a estes parâmetros “clássicos” de Krein, $q_{\alpha\beta 11}^i$, podemos demonstrar, através de um exemplo, que o majorante $1/2$ não pode ser melhorado.

Exemplo 4.4.1. *Considerem-se os grafos cocktail party, $K_{l \times 2}$, apresentados na Subsecção 3.2.1 do Capítulo 3. Na Proposição 3.2.4 foi demonstrado que estes grafos são fortemente regulares com parâmetros $(2l, 2l-2, 2l-4, 2l-2)$. Os valores próprios destes grafos são $k = 2l-2$, $\theta = 0$ e $\tau = -2$, e notando que*

$$\begin{aligned} q_{1211}^1 &= \frac{(|\tau|n + \tau - k)(\theta n + k - \theta)}{n^2(\theta - \tau)^2} + \frac{(n + \tau - k)(-n + k - \theta)\theta}{n^2(\theta - \tau)^2} \\ &+ \frac{(\tau - k)(k - \theta)(-\theta - 1)}{n^2(\theta - \tau)^2}, \end{aligned}$$

segue que

$$q_{1211}^1 = \frac{l-1}{2l},$$

que converge para $1/2$, quando l cresce.

4.5 Séries Binomiais Generalizadas e Condições de Admissibilidade

A procura de novas condições de admissibilidade sobre os parâmetros de um grafo fortemente regular levou-nos a considerar uma série binomial generalizada de potências

de Kronecker dos idempotentes de Υ , (4.1)-(4.3). Este trabalho está redigido em [48] e encontra-se submetido para publicação. Outras abordagens semelhantes, embora menos gerais, encontram-se publicadas em [46, 47, 63]. Tendo em consideração a decomposição espectral de A ,

$$A = kE_0 + \theta E_1 + \tau E_2,$$

seja l um natural, α um real positivo e $S_{(2l)\alpha}^{\otimes}$ o somatório seguinte:

$$\begin{aligned} S_{(2l)\alpha}^{\otimes} &= \binom{-\alpha}{0} J_n^{\otimes 2l} - \binom{-\alpha}{1} J_n^{\otimes 2l-2} \otimes E_2^{\otimes 2} + \binom{-\alpha}{2} J_n^{\otimes 2l-4} \otimes E_2^{\otimes 4} + \dots \\ &+ (-1)^{l-1} \binom{-\alpha}{l-1} J_n^{\otimes 2} \otimes E_2^{\otimes 2l-2} + (-1)^l \binom{-\alpha}{l} E_2^{\otimes 2l}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde cada parcela é um produto de Kronecker com $2l$ factores. Note-se que, para qualquer real α e para cada inteiro não negativo $k \geq 1$, temos que

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},$$

com $\binom{\alpha}{0} = 1$, que se designa normalmente por *número binomial generalizado*. O somatório $S_{(2l)\alpha}^{\otimes}$ tem uma submatriz principal dada por:

$$\begin{aligned} S_{(2l)\alpha}^{\circ} &= \binom{-\alpha}{0} J_n^{\circ 2l} - \binom{-\alpha}{1} J_n^{\circ 2l-2} \circ E_2^{\circ 2} + \binom{-\alpha}{2} J_n^{\circ 2l-4} \circ E_2^{\circ 4} + \dots \\ &+ (-1)^{l-1} \binom{-\alpha}{l-1} J_n^{\circ 2} \circ E_2^{\circ 2l-2} + (-1)^l \binom{-\alpha}{l} E_2^{\circ 2l}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Note-se que, sendo J_n identidade para o produto de Hadamard, (4.12) pode ser escrita como

$$S_{(2l)\alpha}^{\circ} = \sum_{i=0}^l (-1)^i \binom{-\alpha}{i} E_2^{\circ 2i}. \quad (4.13)$$

Sejam $q_{(2l)\alpha}^0, q_{(2l)\alpha}^1$ e $q_{(2l)\alpha}^2$ números reais tais que

$$S_{(2l)\alpha}^{\circ} = \sum_{i=0}^2 q_{(2l)\alpha}^i E_i.$$

Visto que o conjunto

$$\mathcal{B} = \{E_{i_1} \otimes E_{i_2} \otimes \cdots \otimes E_{i_{2l}} : i_1, i_2, \dots, i_{2l} \in \{0, 1, 2\}\}$$

é um sistema completo de idempotentes ortogonais que é uma base da subálgebra de Jordan Euclidiana real de $\text{Sym}(n^{2l}, \mathbb{R})$, $(\mathcal{V}')^{\otimes 2l}$, gerada por $I_n^{\otimes 2l}$ e pela potências naturais de $A^{\otimes 2l}$, então o polinómio mínimo de $S_{(2l)\alpha}^{\otimes}$ é

$$p_{\alpha}(\lambda) = (\lambda - 0) \prod_{i=0}^l \left(\lambda - (-1)^i \binom{-\alpha}{i} n^{2(l-i)} \right).$$

Note-se que para obter o polinómio mínimo usamos (2.1) e o sistema completo de idempotentes ortogonais, \mathcal{B} , em cada parcela de (4.11).

Tomando em consideração que a matriz em (4.13) é uma submatriz principal de $S_{(2l)\alpha}^{\otimes}$ e que p_{α} é o polinómio mínimo de $S_{(2l)\alpha}^{\otimes}$, pelo Teorema do Entrelaçamento, Teorema 2.4.2, os valores próprios de $S_{(2l)\alpha}^{\circ}$ são todos não negativos. Observando que

$$\begin{aligned} S_{(2l)\alpha}^{\circ} &= \sum_{i=0}^l (-1)^i \binom{-\alpha}{i} \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^{2i} I_n \\ &+ \sum_{i=0}^l (-1)^i \binom{-\alpha}{i} \left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^{2i} A \\ &+ \sum_{i=1}^l (-1)^i \binom{-\alpha}{i} \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^{2i} (J_n - A - I_n), \end{aligned} \quad (4.14)$$

e como $|\tau| > 1$, então

$$\left| \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right| < 1, \quad (4.15)$$

$$\left| \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right| < 1 \text{ e} \quad (4.16)$$

$$\left| \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right| < 1, \quad (4.17)$$

e, portanto, a série

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \binom{-\alpha}{i} E_2^{\circ 2i}$$

é convergente. Designe-se a sua soma por $\Sigma_{2\alpha}$.

O próximo resultado contém uma nova desigualdade que os parâmetros de qualquer grafo fortemente regular têm que satisfazer.

Teorema 4.5.1. [48] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) satisfazendo $0 < c \leq k < n - 1$, e matriz de adjacência A cujos valores próprios são k, θ e τ . Então, para qualquer real positivo α , temos*

$$0 \leq \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right)^\alpha} + \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right)^\alpha} \tau + \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right)^\alpha} (-\tau - 1). \quad (4.18)$$

Demonstração. Sejam $q_{\infty\alpha}^0, q_{\infty\alpha}^1$ e $q_{\infty\alpha}^2$ os números reais tais que

$$\Sigma_{2\alpha} = \lim_{l \rightarrow +\infty} S_{(2l)\alpha}^\circ = q_{\infty\alpha}^0 E_0 + q_{\infty\alpha}^1 E_1 + q_{\infty\alpha}^2 E_2. \quad (4.19)$$

Visto que

$$S_{(2l)\alpha}^\circ = q_{(2l)\alpha}^0 E_0 + q_{(2l)\alpha}^1 E_1 + q_{(2l)\alpha}^2 E_2, \quad (4.20)$$

aplicando limites a (4.20) e observando as expressões de (4.19) e (4.20) obtemos que

- $q_{\infty\alpha}^0 = \lim_{l \rightarrow \infty} q_{(2l)\alpha}^0$,
- $q_{\infty\alpha}^1 = \lim_{l \rightarrow \infty} q_{(2l)\alpha}^1$,
- $q_{\infty\alpha}^2 = \lim_{l \rightarrow \infty} q_{(2l)\alpha}^2$.

Como os valores próprios de $S_{(2l)\alpha}^\circ$ são não negativos, segue que $q_{\infty\alpha}^0 \geq 0$, $q_{\infty\alpha}^1 \geq 0$ e $q_{\infty\alpha}^2 \geq 0$. Então, a partir de (4.14) e após alguma manipulação algébrica, obtemos:

$$q_{\infty\alpha}^2 = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right)^\alpha} + \frac{\tau}{\left(1 - \left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right)^\alpha} + \frac{-\tau - 1}{\left(1 - \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right)^\alpha},$$

o que prova o que pretendíamos. □

Note-se que as fórmulas para os outros reais $q_{\infty\alpha}^0$ e $q_{\infty\alpha}^1$ são obtidos de forma análoga.

De seguida apresentamos alguns resultados experimentais. Na tabela 4.5.1 consideramos o valor de $q_{\infty\alpha}^2$ do lado direito da desigualdade (4.18) do Teorema 4.5.1 e apresentamos os resultados obtidos para os conjuntos de parâmetros

- $P_1 = (1275, 364, 63, 120)$,
- $P_2 = (1296, 435, 90, 174)$ e
- $P_3 = (1296, 434, 64, 186)$,

para diferentes valores de α . Para cada conjunto de parâmetros apresentamos os valores dos respetivos valores próprios θ e τ .

Parâmetros	P_1	P_2	P_3
θ	4	3	2
τ	-61	-87	-124
$q_{\infty 0.01}^2$	-2.0×10^{-5}	-2.2×10^{-5}	-2.3×10^{-5}
$q_{\infty 0.5}^2$	-1.0×10^{-3}	-1.1×10^{-3}	-1.1×10^{-3}
$q_{\infty 1}^2$	-1.9×10^{-3}	-2.2×10^{-3}	-2.3×10^{-3}
$q_{\infty 5}^2$	-9.5×10^{-3}	-1.1×10^{-2}	-1.1×10^{-2}
$q_{\infty 10}^2$	-1.9×10^{-2}	-2.2×10^{-2}	-2.2×10^{-2}
$q_{\infty 50}^2$	-7.3×10^{-2}	-1.1×10^{-1}	-1.1×10^{-1}

Tabela 4.5.1: Resultados numéricos para P_1 , P_2 e P_3 .

A desigualdade (4.18) do Teorema 4.5.1 permitiu-nos obter o resultado seguinte que se aplica a conjuntos de parâmetros com $k < n/2$.

Corolário 4.5.1. [48] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) , satisfazendo $0 < c \leq k < n - 1$, e matriz de adjacência A cujos valores próprios são k, θ e τ . Se $k < n/2$, então*

$$-\tau(-2\tau - 1)(4\theta - 2\tau + 1) \leq \frac{2n}{n - 2(k - \theta)}\theta(\theta + 1)(2\theta - 2\tau - 1)(\theta - \tau + 1). \quad (4.21)$$

Demonstração. A partir da desigualdade (4.18) do Teorema 4.5.1, com $\alpha = 1$, visto que

$$(-n + k - \theta)^2 = (n - k + \theta)^2,$$

concluimos que

$$0 \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{n - k + \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2}^\tau + \frac{1}{1 - \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2}(-\tau - 1).$$

Associando os termos com τ obtemos

$$0 \leq \frac{\left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2 - \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right]} + \frac{\left(\frac{n - k + \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2 - \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{n - k + \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2\right]}^\tau.$$

Multiplicando por $1 - \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2$ e após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$0 \leq \frac{\frac{\theta(\theta n + 2k - 2\theta)}{n(\theta - \tau)^2}}{1 - \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2} + \frac{\frac{n - 2k + 2\theta}{n(\theta - \tau)^2}}{1 - \left(\frac{n - k + \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2}^\tau.$$

Multiplicando por $(\theta - \tau)^2$, considerando $k < n/2$ e desprezando -2θ temos

$$0 < \frac{\theta(\theta + 1)}{1 - \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2} + \frac{\frac{n - 2k + 2\theta}{n}}{1 - \left(\frac{n - k + \theta}{n(\theta - \tau)}\right)^2}^\tau. \quad (4.22)$$

Observemos agora os denominadores do lado direito da inequação (4.22). Quanto ao primeiro denominador consideramos $k < n/2$, desprezamos $-\theta$ e simplificamos. Relativamente ao segundo denominador, simplificamos usando a diferença entre dois quadrados e, ao longo do processo, desprezamos $-\theta$ e $-k + \theta$. Assim, obtemos:

$$0 < \frac{\theta(\theta + 1)}{\frac{(-2\tau - 1)(4\theta - 2\tau + 1)}{4(\theta - \tau)^2}} + \frac{\frac{n - 2k + 2\theta}{n}}{\frac{(\theta - \tau - \frac{1}{2})(\theta - \tau + 1)}{(\theta - \tau)^2}}^\tau.$$

Finalmente, multiplicando ambos os termos da desigualdade por $\frac{1}{4(\theta - \tau)^2}$,

$$0 < \frac{\theta(\theta + 1)}{(-2\tau - 1)(4\theta - 2\tau + 1)} + \frac{n - 2k + 2\theta}{2n(2\theta - 2\tau - 1)(\theta - \tau + 1)}^\tau,$$

o que pode ser reescrito na forma de (4.21). □

Fixados n , k e θ e analisando a desigualdade (4.21) observamos que o lado esquerdo é um polinómio em $|\tau|$ de grau 3, enquanto que o lado direito é um polinómio em $|\tau|$ de grau 2, ambos com coeficiente líder positivo. Podemos então concluir que se $|\tau|$ for maior que θ , então o valor de $|\tau|$ não pode ser muito afastado relativamente ao valor de θ .

Se aplicarmos o Corolário 4.5.1 aos parâmetros do grafo complementar, \overline{G} , deduzimos o resultado seguinte que apresenta uma condição de admissibilidade para grafos que satisfazem $k > n/2 - 1$.

Corolário 4.5.2. [48] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) , satisfazendo $0 < c \leq k < n - 1$, e matriz de adjacência A cujos valores próprios são k , θ e τ . Se $k > n/2 - 1$, então*

$$(\theta - 1)(2\theta - 3)(-4\tau + 2\theta + 3) < \frac{2n(-\tau + 1)(-\tau + 2)(-2\tau + 2\theta - 1)(\theta - \tau + 1)}{2(k - \tau + 2) - n}. \quad (4.23)$$

Demonstração. Observe-se que a condição $k < n/2$ é equivalente a $\overline{k} > n/2 - 1$. Assim, aplicando a desigualdade (4.21) do Teorema 4.5.1 ao conjunto de parâmetros $(n, \overline{k}, \overline{a}, \overline{c})$ introduzidos em (3.2)-(3.4), de \overline{G} , a desigualdade (4.23) segue diretamente. \square

O Corolário 4.5.2 pode ser interpretado de uma forma semelhante à do Corolário 4.5.1. De facto, fixando n , k e τ , a desigualdade (4.23) apresenta um polinómio em θ de grau 3, no lado esquerdo da desigualdade, e um polinómio em θ de grau 2 no lado direito da desigualdade. Então, podemos concluir que o valor de θ não pode ser muito afastado relativamente ao valor de $|\tau|$.

Finalmente, se combinarmos as conclusões obtidas para os Corolários 4.5.1 e 4.5.2, podemos concluir que para qualquer conjunto de parâmetros (n, k, a, c) de um grafo fortemente regular o valor de $|\tau - \theta|$ não pode ser muito grande, isto é, os valores de θ e $|\tau|$ não podem ser muito afastados.

Para terminar esta secção apresentamos alguns exemplos de conjuntos de parâmetros (n, k, a, c) que satisfazem $k < n/2$ mas não verificam a desigualdade (4.21) do Corolário 4.5.1, juntamente com os correspondentes conjuntos de parâmetros dos grafos complementares $(n, \overline{k}, \overline{a}, \overline{c})$ que satisfazem naturalmente $k > n/2 - 1$ mas não verificam a

desigualdade (4.23) do Corolário 4.5.2. Na Tabela 4.5.2 consideramos os conjuntos de parâmetros:

- $P_4 = (1024, 385, 36, 210)$,
- $P_5 = (1225, 456, 39, 247)$,
- $P_6 = (1296, 481, 40, 260)$ e
- $P_7 = (1275, 378, 57, 135)$.

Para cada conjunto de parâmetros também apresentamos os valores próprios correspondentes, θ e τ , e ainda o valor de

$$m_1 = \tau(-2\tau - 1)(4\theta - 2\tau + 1) + \frac{2n}{n - 2(k - \theta)}\theta(\theta + 1)(2\theta - 2\tau - 1)(\theta - \tau + 1),$$

obtido directamente da desigualdade (4.21) do Corolário 4.5.1.

Parâmetros	P_4	P_5	P_6	P_7
θ	1	1	1	3
τ	-175	-209	-221	-81
m_1	-2.1×10^7	-3.5×10^7	-4.2×10^7	-1.45×10^6

Tabela 4.5.2: Resultados numéricos para P_4 , P_5 , P_6 e P_7 .

Os dados apresentados na Tabela 4.5.2 confirmam as conclusões extraídas do Corolário 4.5.1, ou seja, se o valor de θ for muito mais pequeno que o valor de $|\tau|$, então a sequência (n, k, a, c) não corresponde a um grafo fortemente regular.

Na Tabela 4.5.3 apresentamos os conjuntos de parâmetros complementares de P_1 , P_2 e P_3 , denotados por:

- $\overline{P_4} = (1024, 638, 462, 290)$,
- $\overline{P_5} = (1225, 768, 558, 352)$,
- $\overline{P_6} = (1296, 814, 592, 374)$ e
- $\overline{P_7} = (1275, 896, 652, 576)$.

Para cada conjunto de parâmetros apresentamos os respectivos valores próprios θ e τ , e ainda o valor de

$$m_2 = \frac{2n(-\tau + 1)(-\tau + 2)(-2\tau + 2\theta - 1)(\theta - \tau + 1)}{2(k - \tau + 2) - n} - (\theta - 1)(2\theta - 3)(-4\tau + 2\theta + 3),$$

obtido diretamente da desigualdade (4.23) do Corolário 4.5.2.

Parâmetros	$\overline{P_4}$	$\overline{P_5}$	$\overline{P_6}$	$\overline{P_7}$
θ	174	208	220	80
τ	-2	-2	-2	-4
m_2	-1.6×10^7	-2.8×10^7	-3.4×10^7	-1.7×10^5

Tabela 4.5.3: Resultados numéricos para $\overline{P_4}$, $\overline{P_5}$, $\overline{P_6}$ e $\overline{P_7}$.

Os resultados expressos na tabela 4.5.3 confirmam as conclusões obtidas para o Corolário 4.5.2, nomeadamente se o valor de $|\tau|$ for muito mais pequeno relativamente ao valor de θ , então a sequência (n, k, a, c) não corresponde a nenhum grafo fortemente regular.

4.6 Séries Funcionais e Condições de Admissibilidade

Nesta secção usamos as séries das funções hiperbólicas do seno e do cosseno para determinar novas condições de admissibilidade sobre os parâmetros de um grafo fortemente regular. O argumento usado é semelhante ao da Secção 4.5 e pode ser aplicado a qualquer série funcional com coeficientes positivos. Este trabalho está redigido em [64] e encontra-se submetido para publicação.

Para cada natural l seja $S_{(4l-2)\epsilon}^{\otimes}$ o somatório seguinte:

$$S_{(4l-2)\epsilon}^{\otimes} = \epsilon E_2^{\otimes 2} \otimes J_n^{\otimes(4l-4)} + \frac{\epsilon^3}{3!} E_2^{\otimes 6} \otimes J_n^{\otimes(4l-8)} + \cdots + \frac{\epsilon^{2l-1}}{(2l-1)!} E_2^{\otimes(4l-2)}, \quad (4.24)$$

onde cada parcela é um produto de Kronecker com $4l - 2$ fatores e ϵ é um número real positivo menor do que 1. O somatório $S_{(4l-2)\epsilon}^{\otimes}$ tem uma submatriz principal dada por

$$S_{(4l-2)\epsilon}^{\circ} = \epsilon E_2^{\otimes 2} \circ J_n^{\circ(4l-4)} + \frac{\epsilon^3}{3!} E_2^{\circ 6} \circ J_n^{\circ(4l-8)} + \cdots + \frac{\epsilon^{2l-1}}{(2l-1)!} E_2^{\circ(4l-2)} \quad (4.25)$$

e uma vez que J_n é identidade para o produto de Hadamard entre matrizes podemos escrever (4.25) como

$$S_{(4l-2)\epsilon}^\circ = \sum_{i=1}^l \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} E_2^{\circ(4i-2)}. \quad (4.26)$$

Sejam $q_{(4l-2)\epsilon}^0, q_{(4l-2)\epsilon}^1$ e $q_{(4l-2)\epsilon}^2$ os números reais tais que

$$S_{(4l-2)\epsilon}^\circ = \sum_{i=0}^2 q_{(4l-2)\epsilon}^i E_i. \quad (4.27)$$

Observe-se que o conjunto

$$\mathcal{C} = \{E_{i_1} \otimes E_{i_2} \otimes \cdots \otimes E_{i_{4l-2}} : i_1, i_2, \dots, i_{4l-2} \in \{0, 1, 2\}\}$$

é um sistema completo de idempotentes ortogonais que é uma base da subálgebra de Jordan Euclidiana real de $\text{Sym}(n^{4l-2}, \mathbb{R})$, $(\mathcal{V}')^{\otimes(4l-2)}$, gerada por $I_n^{\otimes(4l-2)}$ e pelas potências naturais de $A^{\otimes(4l-2)}$. Assim, o polinómio mínimo de $S_{(4l-2)\epsilon}^\circ$ é dado por

$$p_\epsilon(\lambda) = (\lambda - 0) \prod_{i=1}^l \left(\lambda - \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} n^{4l-4i} \right).$$

Uma vez que a matriz (4.26) é uma submatriz principal de $S_{(4l-2)\epsilon}^\circ$ e p_ϵ é o polinómio mínimo de $S_{(4l-2)\epsilon}^\circ$ então, pelo Teorema do Entrelaçamento dos valores próprios (Teorema 2.4.2), os valores próprios de $S_{(4l-2)\epsilon}^\circ$ são não negativos. Notando que

$$\begin{aligned} S_{(4l-2)\epsilon}^\circ &= \sum_{i=1}^l \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} \left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^{4i-2} I_n \\ &+ \sum_{i=1}^l \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} \left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^{4i-2} A \\ &+ \sum_{i=1}^l \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} \left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^{4i-2} (J_n - A - I_n), \end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} S_{(4l-2)\epsilon}^\circ &= \sum_{i=1}^l \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} \left[\left(\frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \right]^{2i-1} I_n \\ &+ \sum_{i=1}^l \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} \left[\left(\frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \right]^{2i-1} A \\ &+ \sum_{i=1}^l \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} \left[\left(\frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \right]^{2i-1} (J_n - A - I_n). \end{aligned}$$

Tal como foi observado na secção anterior em (4.15)-(4.17) e como $\epsilon < 1$, temos que a série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} \left((E_2)^{\circ 2} \right)^{\circ(2i-1)}$$

é convergente com soma $\Sigma_{2\epsilon}$ onde,

$$\begin{aligned} \Sigma_{2\epsilon} = & \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 I_n + \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 A \\ & + \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (J_n - A - I_n). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Prosseguindo com um argumento análogo ao usado na prova do Teorema 4.5.1, considerem-se os números reais $q_{\infty\epsilon}^0$, $q_{\infty\epsilon}^1$ e $q_{\infty\epsilon}^2$ tais que

$$\Sigma_{2\epsilon} = q_{\infty\epsilon}^0 E_0 + q_{\infty\epsilon}^1 E_1 + q_{\infty\epsilon}^2 E_2.$$

Visto que

- $q_{\infty\epsilon}^0 = \lim_{l \rightarrow +\infty} q_{(4l-2)\epsilon}^0$,
- $q_{\infty\epsilon}^1 = \lim_{l \rightarrow +\infty} q_{(4l-2)\epsilon}^1$ e
- $q_{\infty\epsilon}^2 = \lim_{l \rightarrow +\infty} q_{(4l-2)\epsilon}^2$,

e ainda que os valores próprios de $S_{(4l-2)\epsilon}^{\circ}$ são não negativos, segue que $q_{\infty\epsilon}^0$, $q_{\infty\epsilon}^1$ e $q_{\infty\epsilon}^2$ são também não negativos. Então, a partir de (4.28) e após alguma manipulação algébrica, obtemos:

$$\begin{aligned} q_{\infty\epsilon}^0 = & \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 + \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 k \\ & + \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (n - k - 1); \\ q_{\infty\epsilon}^1 = & \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 + \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \theta \\ & + \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (-\theta - 1); \\ q_{\infty\epsilon}^2 = & \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 + \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \tau \\ & + \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (-\tau - 1). \end{aligned}$$

Finalmente, vamos considerar a matriz $S_{2\epsilon} = E_2 \circ \Sigma_{2\epsilon}$. Novamente consideramos os reais $q_{2\epsilon}^0, q_{2\epsilon}^1$ e $q_{2\epsilon}^2$ tais que

$$S_{2\epsilon} = q_{2\epsilon}^0 E_0 + q_{2\epsilon}^1 E_1 + q_{2\epsilon}^2 E_2.$$

A não negatividade dos valores próprios de $S_{2\epsilon}$, $q_{2\epsilon}^i$, com $i \in \{0, 1, 2\}$, segue diretamente da propriedade (i) do Corolário 2.4.2 e da não negatividade dos parâmetros $q_{\infty\epsilon}^i$, com $i \in \{0, 1, 2\}$, para além do facto de E_3 ser uma matriz idempotente. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} q_{2\epsilon}^0 &= \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \\ &+ \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 k \\ &+ \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (n - k - 1); \\ q_{2\epsilon}^1 &= \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \\ &+ \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \theta \\ &+ \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (-\theta - 1); \\ q_{2\epsilon}^2 &= \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \\ &+ \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \tau \\ &+ \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (-\tau - 1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Note-se que cada $q_{2\epsilon}^i \geq 0$, para $i \in \{0, 1, 2\}$, constitui uma nova desigualdade sobre os parâmetros de um grafo fortemente regular. Além disso, para conjuntos de parâmetros (n, k, a, c) que satisfazem $k < n/2$, temos o resultado seguinte:

Teorema 4.6.1. [64] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) , satisfazendo $0 < c \leq k < n - 1$, e matriz de adjacência A cujos valores próprios são k, θ e τ . Se $k < n/2$, então*

$$k < (\theta + 1)^2 \theta \frac{n^2}{(n - 2(k - \theta))(n - k + \theta)}. \quad (4.30)$$

Demonstração. Seja ϵ um número real positivo menor do que 1. Como $q_{2\epsilon}^0$ é não negativo e

$$(k - \theta)(n - k - 1) = -(\theta n + k - \theta) - (-n + k - \theta)k,$$

reescrevendo (4.29), deduzimos que

$$\begin{aligned} 0 \leq & \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \left[\sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 - \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \right] \\ & - \frac{(n - k + \theta)k}{n(\theta - \tau)} \left[\sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{n - k + \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 - \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Aplicando o Teorema de Lagrange ao membro direito da desigualdade (4.31) relativamente à função real de variável real $f(x) = \sinh(\epsilon x)$ no intervalo

$$\left[\frac{(k - \theta)^2}{(n(\theta - \tau))^2}, \frac{(\theta n + k - \theta)^2}{(n(\theta - \tau))^2} \right]$$

e no intervalo

$$\left[\frac{(k - \theta)^2}{(n(\theta - \tau))^2}, \frac{(n - k + \theta)^2}{(n(\theta - \tau))^2} \right]$$

e, fazendo majorações convenientes, concluímos que

$$\begin{aligned} 0 \leq & \epsilon \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \cosh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\theta n + k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \frac{\theta n + 2(k - \theta)}{n(\theta - \tau)} \frac{\theta}{\theta - \tau} \\ & - \epsilon \frac{(n - k + \theta)k}{n(\theta - \tau)} \cosh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{k - \theta}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \frac{n - 2(k - \theta)}{n(\theta - \tau)} \frac{1}{\theta - \tau}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade (4.32) por $1/\epsilon$ e aplicando limites quando ϵ tende para 0 a ambos os membros da desigualdade obtida, vem que

$$0 \leq \frac{(\theta n + k - \theta)(\theta n + 2(k - \theta))\theta}{n^2} - \frac{k(n - k + \theta)(n - 2(k - \theta))}{n^2}. \quad (4.33)$$

Finalmente, visto que

$$\frac{\theta n + k - \theta}{n} < \theta + 1$$

e como $k < n/2$, concluímos que

$$\frac{\theta n + 2(k - \theta)}{n} < \theta + 1,$$

o que por sua vez nos permite obter

$$0 < (\theta + 1)^2 \theta - \frac{k(n - k + \theta)(n - 2(k - \theta))}{n^2},$$

e, portanto, (4.30). □

Analisando a desigualdade (4.30) concluímos que se G for um grafo fortemente regular com conjunto de parâmetros (n, k, a, c) , com $k < n/2$, fixando k , o valor de θ não pode ser muito pequeno comparado com o valor de k .

Esta conclusão é mais forte se $k \ll n/2$. Por exemplo, quando $k < n/4$, a partir da desigualdade (4.30) concluímos que

$$k < 3(\theta + 1)^2\theta,$$

e, então, para valores suficientemente pequenos de θ esta desigualdade não é verificada.

Utilizando um argumento semelhante ao que foi usado para obter a matriz $S_{2\epsilon}$, vamos considerar a matriz $S_{1\epsilon} = E_1 \circ \Sigma_{1\epsilon}$, onde

$$\begin{aligned}\Sigma_{1\epsilon} &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\epsilon^{2i-1}}{(2i-1)!} \left((E_1)^{\circ 2} \right)^{\circ(2i-1)} \\ &= \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 I_n + \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 A \\ &+ \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (J_n - A - I_n).\end{aligned}\tag{4.34}$$

Analogamente, concluímos a não negatividade dos reais $q_{1\epsilon}^i$, com $i \in \{0, 1, 2\}$, tais que

$$S_{1\epsilon} = q_{1\epsilon}^0 E_0 + q_{1\epsilon}^1 E_1 + q_{1\epsilon}^2 E_2$$

e deduzimos as respectivas expressões:

$$\begin{aligned}q_{1\epsilon}^0 &= \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \\ &+ \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 k \\ &+ \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (n - k - 1);\end{aligned}\tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
q_{1\epsilon}^1 &= \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \\
&+ \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \theta \\
&+ \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (-\theta - 1); \\
q_{1\epsilon}^2 &= \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \\
&+ \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \tau \\
&+ \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 (-\tau - 1).
\end{aligned}$$

O parâmetro $q_{1\epsilon}^0$, presente em (4.35), permitiu-nos obter um resultado complementar ao do Teorema 4.6.1, já que se aplica a conjuntos de parâmetros com (n, k, a, c) com $k > n/2$.

Teorema 4.6.2. [64] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, k, a, c) , satisfazendo $0 < c \leq k < n - 1$, e matriz de adjacência A cujos valores próprios são k, θ e τ . Se $k > n/2$, então*

$$k < (-\tau - 1)\tau^2 \frac{n^2}{(n + \tau - k)(-n + 2(k - \tau))}. \quad (4.36)$$

Demonstração. A não negatividade do parâmetro $q_{1\epsilon}^0$ e a igualdade

$$(\tau - k)(n - k - 1) = -(-\tau n + \tau - k) - (n + \tau - k)k,$$

permitem-nos escrever (4.35) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \left[\sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 - \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \right] \\
&- \frac{(n + \tau - k)k}{n(\theta - \tau)} \left[\sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 - \sinh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \right]. \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Lagrange à função real de variável real $f(x) = \sinh(\epsilon x)$ no intervalo

$$\left[\frac{(\tau - k)^2}{(n(\theta - \tau))^2}, \frac{(-\tau n + \tau - k)^2}{(n(\theta - \tau))^2} \right]$$

e no intervalo

$$\left[\frac{(\tau - k)^2}{(n(\theta - \tau))^2}, \frac{(n + \tau - k)^2}{(n(\theta - \tau))^2} \right],$$

e após majorações convenientes, obtemos

$$0 \leq \epsilon \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \cosh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \frac{-\tau n + 2(\tau - k)}{n(\theta - \tau)} \frac{-\tau}{\theta - \tau} - \epsilon \frac{(n + \tau - k)k}{n(\theta - \tau)} \cosh \left(\sqrt{\epsilon} \frac{n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} \right)^2 \frac{-n + 2(k - \tau)}{n(\theta - \tau)} \frac{1}{\theta - \tau}. \quad (4.38)$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade (4.38) por $1/\epsilon$ e aplicando limites quando ϵ tende para 0 a ambos os membros da desigualdade resultante, obtemos:

$$0 \leq \frac{(-\tau n + \tau - k)(-\tau n + 2(\tau - k))(-\tau)}{n^2} - \frac{(n + \tau - k)k(-n + 2(k - \tau))}{n^2}. \quad (4.39)$$

Finalmente, como

$$\frac{-\tau n + \tau - k}{n(\theta - \tau)} < \frac{-\tau - 1}{\theta - \tau}$$

e

$$\frac{-\tau n + 2(\tau - k)}{n(\theta - \tau)} < \frac{-\tau}{\theta - \tau},$$

temos que

$$0 < (-\tau - 1)\tau^2 - \frac{k(n + \tau - k)(-n + 2(k - \tau))}{n^2}$$

e, portanto, a desigualdade (4.36) resulta de imediato. \square

A desigualdade (4.36) do Teorema 4.6.2 permite-nos concluir que, dado um grafo fortemente regular G com parâmetros (n, k, a, c) tal que $k > n/2$, fixando o valor de k , o valor de $|\tau|$ não pode ser muito pequeno relativamente ao valor de k .

Vamos terminar esta secção com alguns resultados experimentais. Na Tabela 4.6.1 podemos observar alguns exemplos de conjuntos de parâmetros (n, k, a, c) que não verificam a desigualdade (4.30) do Teorema 4.6.1. Os conjuntos de parâmetros estudados foram:

- $P_1 = (1296, 481, 40, 260)$,
- $P_2 = (1288, 312, 36, 88)$,
- $P_3 = (1275, 364, 63, 120)$,
- $P_4 = (63, 22, 1, 11)$ e
- $P_5 = (936, 255, 30, 84)$.

Cada conjunto satisfaz $k < n/2$ e, para cada um, apresenta-se os respectivos valores próprios θ , τ e ainda o valor de

$$m_3 = (\theta + 1)^2 \theta n^2 / ((n - 2(k - \theta))(n - k + \theta)) - k,$$

definido a partir da desigualdade (4.30) do Teorema 4.6.1.

Parâmetros	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
θ	1	4	4	1	3
τ	-221	-56	-61	-11	-57
m_3	-456.5	-60.1	-43.9	-4.0	-112.7

Tabela 4.6.1: Resultados numéricos para P_1 , P_2 , P_3 , P_4 e P_5 .

Na Tabela 4.6.2, apresentamos alguns exemplos de conjuntos de parâmetros (n, k, a, c) que não verificam a desigualdade (4.36) do Teorema 4.6.2. Os conjuntos de parâmetros considerados foram os seguintes:

- $P_6 = (1275, 910, 665, 610)$,
- $P_7 = (1296, 861, 612, 492)$,
- $P_8 = (1296, 860, 598, 516)$,
- $P_9 = (1275, 896, 652, 576)$ e
- $P_{10} = (841, 520, 375, 234)$.

Cada conjunto satisfaz $k > n/2$ e para cada um deles fornecemos os valores próprios respectivos e ainda o valor de

$$m_4 = (-\tau - 1)\tau^2 \frac{n^2}{(n + \tau - k)(-n + 2(k - \tau))} - k,$$

definido a partir da desigualdade (4.36) do Teorema 4.6.2.

Os resultados experimentais confirmam as conclusões retiradas dos Teoremas 4.6.1 e 4.6.2, nomeadamente que, para um valor de k fixo:

- se $k < n/2$, o valor de θ não pode ser muito inferior relativamente ao valor de k e
- se $k > n/2$, o valor de $|\tau|$ não pode ser muito inferior relativamente ao valor de k .

Parâmetros	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
θ	60	123	86	80	143
τ	-5	-3	-4	-4	-2
m_4	-96.4	-699.0	-428.0	-499.7	-476.3

Tabela 4.6.2: Resultados numéricos para P_6 , P_7 , P_8 , P_9 e P_{10} .

4.7 Conclusões e Trabalho Futuro

O objetivo central dos trabalhos deste doutoramento era encontrar novas condições de admissibilidade sobre grafos fortemente regulares. Esta procura conduziu-nos às álgebras de Jordan euclidianas, em particular, ao estudo da álgebra de Jordan euclidiana \mathcal{V}'_n , gerada pela matriz identidade e pelas potências naturais da matriz de adjacência de um grafo fortemente regular. O estudo de \mathcal{V}'_n resultou na generalização dos parâmetros de Krein associados a um grafo fortemente regular e na obtenção de diversas novas condições de admissibilidade generalizadas sobre o espectro destes grafos.

Apesar de até ao momento não termos descoberto um exemplo que evidencie a vantagem destas condições generalizadas relativamente às clássicas, esta generalização permitiu-nos obter um novo majorante para alguns dos parâmetros de Krein, majorante esse que se revela mais apertado do que o majorante conhecido e, em alguns casos, provamos mesmo que é ótimo.

Para além destes novos resultados, enveredamos por novas abordagens na tentativa de obter novas condições de admissibilidade. Em primeiro lugar, considerámos uma série binomial generalizada de idempotentes do único sistema de Jordan associado à matriz de adjacência de um grafo fortemente regular de \mathcal{V}'_n . Em segundo lugar, generalizámos o raciocínio anterior a qualquer série funcional de termos positivos e aplicámos esse pensamento às séries hiperbólicas. Em ambos os casos obtivemos novas desigualdades que permitiram iluminar um certo comportamento do espectro de grafos fortemente regulares, nomeadamente, que os valores de θ e $|\tau|$ não podem ser muito afastados, onde θ e τ são os valores próprios, distintos da regularidade, da matriz de adjacência do grafo fortemente regular.

Expostas as conclusões principais do nosso trabalho, realça-se ainda o estudo sobre álgebras de Jordan euclidianas simples, o que conduziu à generalização do Teorema do Entrelaçamento de valores próprios de Cauchy a estas álgebras para uma qualquer ordenação dos valores próprios de um elemento da álgebra.

Por fim, o nosso estudo sobre grafos fortemente regulares levou-nos a observar esta família como casos particulares de estruturas combinatórias mais complexas e gerais, denominadas esquemas associativos. Neste particular, demonstrámos algumas novas propriedades sobre os parâmetros de Krein de um esquema associativo.

Como objetivos futuros do nosso trabalho temos os seguintes:

1. No ambiente das álgebras de Jordan euclidianas, deduzir propriedades espectrais de outras famílias de grafos que não fortemente regulares.
2. A partir do conceito de conjunto (k, t) -regular, subconjunto de vértices de um grafo que induz um subgrafo k -regular tal que todo o vértice que não está nesse subconjunto tem exactamente t vértices vizinhos nele, explorar todas as implicações espectrais desta nova caracterização e estendê-las à determinação de grafos fortemente regulares.
3. Utilizar partições equilibradas e grafos quociente definidos por essas partições por forma a obter relações espectrais interessantes com os grafos fortemente regulares.

Bibliografia

- [1] Albert, A. A., *On a Certain Algebra of Quantum Mechanics*, Annals of Mathematics, Second Series, 35 (1), pp. 65-73, 1934.
- [2] Baes, M., *Spectral Functions and Smoothing Techniques on Jordan Algebras*, PhD Thesis, 2006.
- [3] Bailey, R. A., *Association Schemes, Designed Experiments, Algebra and Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [4] L. W. Beineke, R. J. Wilson e P. J. Cameron, eds., *Topics in Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 2004.
- [5] Belevitch, V., *Theory of $2n$ -terminal networks with applications to conference theory*, Electrical Communication, 27, pp. 231-244, 1950.
- [6] Biggs, Lloyd e Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Oxford University Press, 1998.
- [7] Bondy, J. A. e Murty, U. S. R., *Graph Theory With Applications*, North-Holland.
- [8] Bose, R. C. e Shimamoto, T., *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, J. Am. Statist. Assoc. 47, pp. 151-184, 1952.
- [9] Bose, R. C. and Mesner, D. M., *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, Ann. Math. Statist. 30, pp. 21-38, 1959.
- [10] Bose, R. C., *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math 13, pp. 389-419, 1963.

- [11] Brouwer, A. E. e Lint, J. H. van, *Strongly regular graphs and partial geometries, Enumeration and Design* (D. M. Jackson e S. A. Vanstone, eds.), Academic Press, 1982.
- [12] Brouwer, A. E., Cohen A. M. e Neumaier, A., *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, 1989.
- [13] Brouwer, A. E. e Haemers, W. H., *Association Schemes*, Handbook of Combinatorics, Eds. R. Graham, M. Grötschel e L. Lovász, Elsevier, Amsterdam, pp. 747-771, 1995.
- [14] Cameron, P. J. e Lint, J. H. van, *Graph theory, coding theory and block designs*, London Math. Soc. Lecture notes, 19, 1975.
- [15] Cameron, P. J., Goethals, J. M. e Seidel, J.J., *Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents*, J. Algebra, 55, pp 257-280, 1978.
- [16] Cameron, P. J., *Strongly regular graphs*, Selected Topics in Graph Theory, eds. L. W. Beineke e R. J. Wilson, Academic Press, 1978.
- [17] Cameron, P. J., *Permutation Groups*, Cambridge University Press, 1999.
- [18] Cardoso, D. M. e Vieira, L.A., *Conceitos e resultados sobre álgebras de Jordan*, Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, CM03/I-20, 2003.
- [19] Cardoso, D. M. e Vieira, L. A., *Euclidean Jordan algebras with strongly regular graphs*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 120, No 1, pp. 881-894, 2004.
- [20] Cardoso, D. M. e Vieira, L.A., *On the optimal parameter of a self-concordant barrier over a symmetric cone*, European Journal of Operational Research, Vol 169, Issue 3, pp. 1148-1157, 2006.
- [21] Cardoso, D. M., Szymański, J. e Rostami, M, *Matemática Discreta*, Escolar Editora, 2009.
- [22] Cardoso, D. M., Mano, V. M., Martins, E. A. e Vieira, L. A., *New tight upper bound for some of the Krein parameters*, manuscrito submetido para publicação.
- [23] Delsarte, Ph., *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. 10, 1973.

- [24] Delsarte, Ph., Goethals, J. M. e Seidel, J. J., *Bounds for system of lines and Jacobi polynomials*, Philips Res. Rep. 30, pp. 91-105, 1975.
- [25] Euler, L., *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 8, pp. 128-140, Opera Omnia: Series 1, Vol 7, pp. 1-10.
- [26] Faraut, J. e Korányi, A., *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Science Publications, 1994.
- [27] Faybusovich, L., *Euclidean Jordan algebras and Interior-point algorithms*, J. Positivity, Vol 1, no 4, pp. 331-357, 1997.
- [28] Faybusovich, L., *Linear systems in Jordan algebras and primal-dual interior-point algorithms*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol 86 pp. 149-175, 1997.
- [29] Godsil, C. e Royle, G., *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.
- [30] Goethals, J. M. e Seidel, J. J., *Strongly regular graphs derived from combinatorial designs*, Canad. J. Math., 22, pp 597-614, 1970.
- [31] Goethals, J. M. e Seidel, J. J., *The regular two-graphs on 276 vertices*, Discrete Math., 12, pp 143-158, 1975.
- [32] Gowda, M. S. e Tao, J., *The Cauchy interlacing theorem in simple Euclidean Jordan algebras and some consequences*, Linear Multilinear Algebra, 59, pp. 65-86, 2011.
- [33] Hairer E. e Wanner, G., *Analysis by its History*, Springer, 2008.
- [34] Higman, D. G., *A survey of some questions and results about rank 3 permutation graphs*, Actes Congrès Intern. Math. Nice 1970, I, Gauthier-Villars, pp. 361-365, 1971.
- [35] Hirzebruch, U., *Der min-max-satz von E. Fischer für formal-reelle Jordan-algebren*, Math. Ann. 186, pp.65-69, 1970.
- [36] Hoffman, A. J. e Singleton, R. R., *On Moore graphs with diameter 2 and 3*, IBM J. Res. Develop., 4, pp. 497-504, 1960.

- [37] Hoffman, A. J, *Eigenvalues of graphs*, Studies in Graph Theory, Part II, pp. 225-245, 1975.
- [38] Horn, R. e Johnson, C. R., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [39] Horn, R. e Johnson, C. R., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [40] Hubaut, X., *Strongly regular graphs*, Discrete Math., 13, pp 357-381, 1975.
- [41] Jacobson, N., *Structure and Representation of Jordan Algebras*, Vol XXXIX of Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.
- [42] Jordan, P., J. v. Neuman e E. Wigner, *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, Annals of Mathematics, 35, pp. 29-64, 1934.
- [43] Koecher, M., *The Minnesota Notes on Jordan Algebras and Their Applications.*, Edited and Annotated by Aloys Krieg and Sebastian Walcher, Springer, Berlin, 1999.
- [44] Lint, J. H. van e Seidel, J. J., *Equilateral points sets in elliptic geometry*, Proc. KNAW A69 (Indag. Math. 28), pp. 335-348, 1969.
- [45] Lint, J. H. v., e R. M. Wilson,, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [46] Mano, V. M. e Vieira, L. A., *Admissibility Conditions and Asymptotic Behavior of Strongly Regular Graphs*, International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Issue 6, Vol 5, pp. 1027-1034, 2011.
- [47] Mano, V. M., Martins, E. A. e Vieira, L. A., *Feasibility Conditions on the Parameters of a Strongly Regular Graph*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 38, pp. 607-613, 2011.
- [48] Mano, V. M., Martins, E. A. e Vieira, L. A., *On Generalized Binomial Series and Strongly Regular Graphs*, manuscrito submetido para publicação.
- [49] Massan, H. e Neher, E., *Estimation and testing for lattice conditional independence models on Euclidean Jordan algebras*, Ann. Statist., Vol 26, no 3, pp. 1051-1082, 1998.

- [50] McCrimmon, K., *Jordan Algebras and their Applications*, in Bulletin of The American Mathematical Society, Vol. 84, n° 4, 1978.
- [51] Neumaier, A., *New inequalities for the parameters of an association scheme*, Combinatorics and Graph Theory, Springer Lecture Notes 885, pp. 365-367.
- [52] Neumaier, A., *Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$* , Archiv der Mathematik 33, pp. 392-400, 1979.
- [53] Neumaier, A., *Regular sets and quasi-symmetric 2- designs*, Combinatorial Theory (eds. D. Jungnickel e K. Vedder), Lecture Notes in Math., 969, Springer-Verlag, Berlin, pp. 258-275, 1982.
- [54] Schmieta, S. H. e Alizadeh, F. *Extension of primal-dual interior point algorithms to symmetric cones*, Math. Program. Ser. A 96, pp. 409-438, 2003.
- [55] Scott, Jr. L. L., *A condition on Higman's parameters*, Notices of Amer. Math. Soc., 20 A-97 (1973), 721-20-45.
- [56] Seidel, J. J., *Strongly regular graphs*, Surveys in Combinatorics, Proceedings of the Seventh British Combinatorial Conference, London Math. Soc. Lecture Note Series 38, Chapter 6, Cambridge University Press, 1979.
- [57] Shakan, G. e Xin, Y., *Q-Polynomial Association Schemes with Irrational Eigenvalues*, A Major Qualifying Project submitted to the Faculty of the Worcester Polytechnic Institute, 2012.
- [58] Shimpuku, T., *Symmetric Algebras by Direct Product of Clifford Algebra*, Seibunsha Publishers, Osaka, Japan, 1988.
- [59] Smith, M. C., *On rank 3 permutation graphs*, J. Algebra, 33, pp. 22-42, 1975.
- [60] Spindler, K., *Abstract Algebra with Applications*, Marcel Dekker, Inc., Vol. I e II, 1994.
- [61] Thompson, D. M., *Eigengraphs: constructing strongly regular graphs with block designs*, Utilitas Math, 20, pp. 83-115, 1981.
- [62] Vieira, L. A. e Mano, V. M., *Majorants of the Generalized Krein Parameters of a Strongly Regular Graph*, AIP Conf. Proc. 1281, pp. 811-814, 2010.

- [63] Vieira, L. A. e Mano, V. M., *Hadamard Series and Inequalities over the Parameters of a Strongly Regular Graph*, AIP Conf. Proc. 1389, pp. 561-564, 2011.
- [64] Vieira, L. A., Martins, E. A. e Mano, V. M., *Inequalities on the Parameters of a Strongly Regular Graph*, manuscrito submetido para publicação.
- [65] Wolkowicz, H., Saigal, R. e Vandenberghe, L., Eds. *Handbook of Semidefinite Programming. Theory, Algorithms, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

Índice

Álgebra

- associativa em potência, 28
- de Bose-Mesner, 96
- de Jordan, 33
 - euclidiana, 39
 - simples, 52
- representável, 52

Arestas, 73

Associados, 91

Caminho, 77

Característica

- da álgebra, 29
- de um elemento, 28

Ciclo, 78

Cintura, 78

Claw bound, 109

Componentes conexas, 77

Comprimento, 77

Condições

- de Krein, 108
- generalizadas de Krein, 116

Cone, 39

- autodual, 39
- convexo, 39

aberto, 39

dos quadrados, 40

dual, 39

homogêneo, 40

simétrico, 40

Conjunto de parâmetros

- admissível, 110
- de um grafo fortemente regular, 79

Decomposição de Peirce, 41

Definido positivo, 40

Derivada direcional, 35

Design simétrico, 106

Determinante, 31

Diâmetro, 78

Distância, 77

Elemento

- invertível, 36
- regular, 29
- unidade, 28

Espectro de um grafo, 75

Esquema

- associativo, 91
- simétrico, 91
- de Hamming, 92

de Johnson, 92
 Forma bilinear
 associativa, 52
 simétrica, 52
 Função de incidência, 73
 Grafo, 73
 bipartido, 75
 completo, 75
 cocktail party, 89
 complementar, 74
 completo, 75
 conexo, 77
 de conferência, 85
 de Moore, 90
 de Paley, 85
 desconexo, 77
 dirigido, 78
 finito, 74
 fortemente regular, 79
 primitivo, 81
 linha, 75
 nulo, 75
 planar, 74
 regular, 77
 simples, 74
 Grafos isomorfos, 74
 Grau de um vértice, 77
 Grupo dos automorfismos, 40
 Ideal, 29
 Idempotente, 37
 Idempotente primitivo, 45
 Incidentes, 73
 Inverso, 36
 Isomorfismo de grafos, 74
 Lacete, 74
 Ligação, 73
 Limites absolutos de Seidel, 109
 Matriz
 de adjacência, 75
 de conferência, 86
 de interseção, 92
 dual, 101
 própria, 99
 dual, 99
 semi-definida positiva, 69
 Número binomial generalizado, 122
 Números de interseção, 91
 Octonhões, 58
 Ordem de um grafo, 73
 Parâmetros de Krein de um esquema associativo, 100
 Parâmetros generalizados de Krein, 115
 Parênteses de Lie, 33
 Parte principal, 63
 Passeio, 77
 Polinômio
 característico, 30
 mínimo, 29
 Primeira decomposição espectral, 46
 Produto

- de Hadamard, 69
- de Jordan, 32
- de Kronecker, 69
- Quaterniões, 54
- Representação, 52
- Representação quadrática, 37
- Segunda decomposição espectral, 47
- Semi-definido positivo, 40
- Sistema
 - de idempotentes ortogonais completo, 45
 - de Jordan, 45
- Subconjunto convexo, 39
- Subespaços de Peirce, 50
- Subgrafo, 77
 - induzido, 77
 - próprio, 77
- Submatriz principal, 69
- Traço, 31
- Vértices, 73
 - adjacentes, 73
 - ligados, 77
 - vizinhos, 73
- Valores próprios, 30
 - de um esquema associativo, 99
 - duais de um esquema associativo, 99
- Vizinhança, 74

